

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra pružnosti a pevnosti



Výpočet hrázového objektu

Calculation of mine dam building

Student:

Bc. Dušan Kahánek

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ostrava 2012

Zadání diplomové práce

Student:

Bc. Dušan Kahánek

Studijní program:

N2301 Strojní inženýrství

Studijní obor:

3901T003 Aplikovaná mechanika

Téma:

Výpočet důlního hrázového objektu
Calculation of Mine Dam Building

Zásady pro vypracování:

1. Rozpracujte teorii potřebnou pro řešení hrázových dveří – rychlé děje, plasticita, atd.
2. Sestavte potřebný soubor dat nutných pro řešení.
3. Proveďte potřebné analytické a numerické výpočty.
4. Ověřte výsledky s dostupnými údaji.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Jones, N.: Structural Impact, Cambridge University Press, 2003, ISBN 0 - 521 - 30180 - 7.
- [2] Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69, SNTL, Brno, 1989.
- [3] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky 1, Vydavatelství CVUT, Praha, 1992.
- [4] Lenert, J.: Úvod do metody konečných prvků, VŠB – TU Ostrava, 1999, ISBN 80 – 7078 – 686 – 8
- [5] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: The Finite Element Method (Volume 1 - 3), Butterworth-Heinemann, Oxford 2000, ISBN 0-7506-5049-4
- [6] Macura, P.: Experimentální metody v pružnosti a plasticitě, VŠB – TU Ostrava, 2001, ISBN 80-7078-934-4
- [7] Brepta, R.: Rázy a vlny v pevných tělesech, ČVUT v Praze, Praha, 1971.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Martin Fusek, Ph.D.**

Datum zadání: 16.12.2011

Datum odevzdání: 21.05.2012

doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Farana, CSc.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 21. května 2012




.....
podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová (bakalářská) práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě 21. května 2012



podpis studenta

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

Bc. KAHÁNEK, D. *Výpočet hrázového objektu*. Ostrava: katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2012, 96 str. Diplomová práce, vedoucí práce Ing, Fusek M., Ph. D.

Diplomová práce se zabývá kontrolním výpočtem důlního hrázového objektu, konkrétně hrázovými dveřmi. Hrázové dveře se využívají jako bezpečnostní prvek v dolech.

Cílem diplomové práce je kontrola konstrukčního návrhu hrázového objektu z hlediska pevnosti. V teoretické části je nastíněna problematika rychlých dynamických dějů, šíření napěťových vln v materiálech a problematika chování materiálu v plastické oblasti. V praktické části je proveden analytický i numerický výpočet. Následně jsou oba výpočty diskutovány navzájem vůči sobě a také vůči datům získaných z experimentu.

ANOTATION OF MASTER THESIS

Bc. KAHÁNEK, D. *Calculation of the Dam Object*. Ostrava: Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Elasticity and Strength, 2012, 96 p. Thesis supervisor: Ing, Fusek M., Ph. D.

The thesis deals with the control calculation of the dam object, specifically of the dam door. The dam door is used as a safety barrier in the mines.

The main aim of this thesis is to check the construction proposal in terms of strength. The theoretical part concentrates on the problems of fast dynamic processes, stress wave spreading and issues with material behaviour in the plastic sphere. The practical part focuses on analytical as well as numerical calculation. Thereafter, both calculations are compared to each other and to data obtained in the experiment.

Obsah

SEZNAM VELIČIN	9
1 ÚVOD	14
2 ROZBOR HRÁZOVÉHO OBJEKTU	15
3 RYCHLÉ DYNAMICKÉ DĚJE	16
3.1 NEWTONOVA ELEMENTÁRNÍ TEORIE RÁZU	17
3.1.1 CENTRÁLNÍ PŘÍMÝ RÁZ	17
3.2 HERTZOVA TEORIE	20
3.3 VLNOVÁ TEORIE	21
3.3.1 ŠÍŘENÍ PODÉLNÝCH NAPĚŤOVÝCH VLN	22
3.3.2 ŠÍŘENÍ OHYBOVÝCH VLN V NOSNÍKU	23
3.3.3 ŠÍŘENÍ PODÉLNÝCH NAPĚŤOVÝCH VLN V TYČI S BILINEÁRNÍM PRACOVNÍM DIAGRAMEM	27
3.3.4 ŠÍŘENÍ PODÉLNÝCH NAPĚŤOVÝCH VLN V TYČI S OBECNÝM PRACOVNÍM DIAGRAMEM	29
3.4 SUPERPOZICE A ODRAZ PODÉLNÝCH NAPĚŤOVÝCH VLN	30
3.5 ODRAZ A LOM PODÉLNÝCH A PŘÍČNÝCH VLN	32
3.6 PŘESTUP PODÉLNÝCH VLN	34
4 PLASTICITA	37
4.1 PRACOVNÍ DIAGRAM A JEHO APROXIMACE	38
4.1.1 TAHOVÁ ZKOUŠKA A PRACOVNÍ DIAGRAMY	38
4.1.2 APROXIMACE PRACOVNÍHO DIAGRAMU	39
4.1.3 APROXIMACE PRACOVNÍHO DIAGRAMU LOMENOU PŘÍMKOU	40
4.1.4 APROXIMACE PRACOVNÍHO DIAGRAMU PARABOLOU	42
4.2 DYNAMICKO-PLASTICKÉ CHOVÁNÍ NOSNÍKU	43
4.2.1 PROSTĚ PODEPŘENÝ NOSNÍK, $0 \leq H \leq 3$	44
4.2.2 PRVNÍ KROK ŘEŠENÍ ODEZVY, $0 \leq T \leq T_1$	46
4.2.3 DRUHÝ KROK ŘEŠENÍ ODEZVY, $T_1 \leq T \leq T_2$	47
4.2.4 PROSTĚ PODEPŘENÝ NOSNÍK, $H > 3$	48
4.2.5 PRVNÍ KROK ŘEŠENÍ ODEZVY, $0 \leq T \leq T_1$	48
4.2.6 DRUHÝ KROK ŘEŠENÍ ODEZVY, $T_1 \leq T \leq T_2$	48
4.2.7 TŘETÍ KROK ŘEŠENÍ ODEZVY, $T_2 \leq T \leq T_3$	49
5 NUMERICKÉ METODY	50
5.1 METODA KONEČNÝCH DIFERENCÍ	50

5.2	METODA KONEČNÝCH PRVKŮ	51
5.2.1	IMPLICITNÍ METODY	51
5.2.2	EXPLICITNÍ METODY	52
6	MATERIÁLOVÉ MODEL Y V MKP ŘEŠIČÍCH.....	55
6.1	ELASTOPLASTICKÝ MATERIÁLOVÝ MODEL	55
6.2	JOHNSON - COOK PLASTICKÝ MATERIÁLOVÝ MODEL.....	56
6.3	ČÁSTEČNĚ LINEÁRNĚ IZOTROPNÍ MODEL.....	57
7	ANALYTICKÝ VÝPOČET	58
7.1	VÝPOČET V PRUŽNÉ OBLASTI	59
7.2	VÝPOČET SE ZAHRNUTÍM PLASTICITY	63
7.3	SHRNU TÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ	66
8	NUMERICKÝ VÝPOČET METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ	68
8.1	GEOMETRICKÝ MODEL	68
8.2	MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI.....	68
8.3	APROXIMACE SMLUVNÍHO DIAGRAMU OCELÍ 11 373 A 11 375.....	70
8.4	APROXIMACE SMLUVNÍHO DIAGRAMU OCELI 11 523	72
8.5	VSTUPY MATERIÁLOVÝCH MODELŮ PRO ŘEŠENÍ MKP	72
8.6	KONEČNOPRVKOVÝ MODEL.....	73
8.6.1	KONEČNOPRVKOVÁ SÍŤ	73
8.6.2	OKRAJOVÉ PODMÍNKY A KONTAKTY	74
8.6.3	APLIKOVANÉ ZATÍŽENÍ	75
8.7	NASTAVENÍ ŘEŠIČE SOL 700	76
8.8	SHRNU TÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ MKP	77
9	EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ, SHRNU TÍ VÝSLEDKŮ.....	82
10	ZÁVĚREČNÉ SHRNU TÍ DOSAŽENÝCH VÝSLEDKŮ	84
11	SEZNAM POUŽITÝCH PRAMENŮ	86
12	PŘÍLOHY.....	88
12.1	TABULKY	88
12.2	ALGORITMY – MATLAB	90
12.2.1	VSTUPNÍ DATA	90
12.2.2	PROCEDURA ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ BEZ VLIVU PLASTICITY PRO $\Delta x = 770$ MM	90

12.2.3	PROCEDURA ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ BEZ VLIVU PLASTICITY PRO $\Delta x = 385$ MM	91
12.2.4	PROCEDURA ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ BEZ VLIVU PLASTICITY PRO $\Delta x = 192,5$ MM	92
12.2.5	PROCEDURA ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ SE ZAHRNUTÝM VLIVEM PLASTICITY	93
	Tvarový součinitel	93
	Výpočet průhybu	94
12.3	SEZNAM PŘÍLOH DODANÝCH NA DVD	95
12.4	SEZNAM POUŽITÉHO SOFTWARE	95

Seznam veličin

Velká písmena latinské abecedy		
Značka	Jednotka	Popis veličiny
A	mm ² -	Plocha průřezu Materiálová konstanta
A ₀	mm ²	Počáteční plocha průřezu
A _P	mm	Plocha průřezu na mezi pevnosti při tahové zkoušce
B	mm -	Šírka nosníku Materiálová konstanta
C	- -	Materiálová konstanta Cowper – Symonds koeficient
C	N·s·mm ⁻¹	Matice tlumení
E	MPa	Modul pružnosti v tahu
E _k	J	Kinetická energie
E _Z	MPa	Plastický modul zpevnění
F	N	Síla
F ^{ext}	N	Vektor externích silových účinků
F ^{int}	N	Vektor interních silových účinků
F ^{residual}	N	Vektor externích silových účinků
F _I	N	Rázová síla
F _{IS}	N	Střední rázová síla
F _{In}	N	Normálová složka rázové síly
F _{It}	N	Tečná složka rázové síly
F _P	N	Síla na mezi pevnosti
G	MPa	Modul pružnosti ve smyku
H	mm	Výška nosníku
I _{FI}	N·s	Impuls rázové síly
J	mm ⁴	Kvadratický moment průřezu

K	MPa	Modul stlačitelnosti kapaliny
K	$\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$	Matice tuhosti
L	mm	Délka nosníku
L_{emin}	mm	Délka nejmenšího elementu
M	$\text{N}\cdot\text{mm}$	Vnitřní ohybový moment
M	kg	Matice hmot
M_0	$\text{N}\cdot\text{mm}$	Plastický moment
M_y	$\text{N}\cdot\text{mm}$	Ohybový moment
P	MPa	Modul plasticity
S	-	Měřítka časového kroku
T	N	Posouvající síla
	s	Doba trvání rázu v druhé etapě
	K	Teplota
T_1	s	Doba trvání rázu ve třetí etapě
T^{m}	K	Homogenická teplota
V	mm	Velikost deformace nosníku
\dot{V}	$\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$	Příčná rychlost deformace ve směru osy y
Z	%	Tažnost
Z_c	mm^3	Elastický modul průřezu
Z_P	%	Tažnost na mezi pevnosti
	mm^3	Plastický modul průřezu

Malá písmena latinské abecedy		
Značka	Jednotka	Popis veličiny
a	$\text{mm}\cdot\text{s}^{-2}$	Zrychlení
	-	Konstanta
b	-	Konstanta
c	mm·s	Rychlost napěťové vlny
	-	Konstanta

c_e	mm·s	Rychlost napěťové vlny v elastické oblasti
c_n	mm·s	Rychlost podélné napěťové vlny
c_p	mm·s	Rychlost napěťové vlny v plastické oblasti
c^*	mm·s	Fázová rychlost napěťové vlny
f	- -	Koeficient tření Tvarový součinitel
f_h	-	funkce zpevnění
h	-	Krok metody konečných diferencí
i	mm ² -	Poloměr setrvačnosti Označení uzlu pro metodu konečných diferencí
l_0	mm	Původní délka
l_p	mm	Délka na mezi pevnosti při tahové zkoušce
m	kg -	Hmotnost Materiálová konstanta
n	-	Koeficient
p	MPa -	Tlak Cowper – Symonds koeficient
q	N·mm ⁻¹	Zatížení na jednotku délky (spojité zatížení)
q_c	N·mm ⁻¹	Statické zatížení na jednotku délky
q_p	N·mm ⁻¹	Kritické zatížení na jednotku délky
r	- mm	Koeficient restituce Poloměr kružnice (koule)
t	s mm	Čas Tloušťka nosníku
u	mm	Posunutí ve směru osy x
v	mm	Posunutí ve směru osy y
\mathbf{v}	mm·s ⁻¹	Vektor; Rychlost
\dot{v}	mm·s ⁻¹	Příčná rychlost deformace ve směru osy y
v_s	mm·s ⁻¹	Střední rychlost

v_c	$\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$	Kármánova kritická rychlost
x	mm	Obecná souřadnice
y	mm	Obecná souřadnice
y_1	mm	Vzdálenost krajního vlákna
\bar{y}	mm	Vzdálenost těžiště od neutrální osy
z	mm	Obecná souřadnice

Malá písmena latinské abecedy		
Značka	Jednotka	Popis veličiny
α	°	Úhel
α_H	-	Koeficient
β	° -	Úhel natočení ohybové čáry vyvolaný posouvající silou; úhel; Konstanta
γ	-	Konstanta
Δl	mm	Prodloužení
Δt	s	Časový krok
Δx	mm	Délkový krok
ϵ	-	Poměrné prodloužení
ϵ_e	-	Elastické poměrné prodloužení
ϵ_p	-	Poměrné prodloužení na mezi pevnosti
$\overline{\epsilon_p}$	MPa	Poměrné prodloužení na skutečné mezi pevnosti
ϵ_{eff}^p	-	Efektivní plastická deformace
$\dot{\epsilon}$	-	Rychlost deformace
ϵ_p	-	Plastické poměrné prodloužení
ϵ_Y	-	Poměrné prodloužení na mezi kluzu
η	-	Poměr statického a kritického spojitého zatížení
ϕ	°	Úhel natočení ohybové čáry
μ	-	Poissonova konstanta

λ	-	Vlnová délka
π	-	Ludolfovo číslo
ρ	$t \cdot \text{mm}^{-3}$	Hustota
σ	MPa	Napětí
σ_0	MPa	Počáteční napětí na mezi kluzu
σ_P	MPa MPa	Napětí na mezi pevnosti Napětí prostupující vlny
$\overline{\sigma_P}$	MPa	Skutečné napětí na mezi pevnosti
σ_r	MPa	Napětí odražené vlny
σ_Y	MPa	Napětí na mezi kluzu
τ	s	Doba trvání rázu
ψ	° -	Úhel natočení ohybové čáry vyvolaný ohybem Koeficient

1 Úvod

Člověk se již od nepaměti snaží k činnostem využívat různé nástroje a pomůcky, jež by mu danou činnost usnadnily. Během evoluce si však lidé postupně nebyli schopni vystačit s primitivními pomůckami a stále vyvíjeli další nástroje, které jim pomáhaly v běžném životě. K tomuto vývoji patřilo nejen využívání nových materiálů, ale také zkoumání jejich fyzikálních a mechanických vlastností, kterých se lidé postupně naučili vhodně využívat.

Tehdy ale i dnes lidé využívají nerostného bohatství planety. Některé vytěžené suroviny dále zpracováváme a využíváme k výrobě jiných materiálů. Jiné se mnohdy používají ve stavu, v jakém byly vytěženy (např. uhlí).

Těžební průmysl je rozsáhlý obor, ve kterém se lidstvo stále snaží nacházet nové možnosti a využívat modernější technologie, což vede nejen k vyšší bezpečnosti práce, ale také má tato snaha pozitivní dopad z ekonomického pohledu. Z hlediska horníků se jedná o poměrně rizikovou práci a není výjimkou, že i v dnešním světě moderních technologií se každoročně objevují zprávy o zavalení dolu a o hornících, kteří tam zůstali zasypani. Těžební společnosti tedy mají snahu neustále zvyšovat bezpečnost při práci v dolech v podobě dokonalejších podpěr či zkvalitnění odvětrávání štol apod.

Každý konstruktér při návrhu strojních zařízení a součástí využívá norem, jež je mají při návrhu vést. I v oblasti těžebního průmyslu je třeba dodržovat normy, a to nejen při výstavbě nových dolů, ale i v oboru důlní bezpečnosti. V České republice se bezpečností mimo jiné zabývá Báňský úřad České republiky. Ten svými předpisy a normami, které vydává či upravuje, říká, jak se mají těžební společnosti chovat z hlediska bezpečnosti. Předmětem této diplomové práce bude řešení (kontrola) důlního hrázového objektu, jež je jedním z bezpečnostních prvků v dolech.

Diplomová práce je rozdělena na dvě oblasti - část teoretickou a praktickou. V oblasti teoretické se budeme zabývat rychlými ději (šíření napěťových vln), které se v současnosti dají řešit třemi teoriemi. Dále se zaměříme na teorii plastického chování materiálu a aplikací materiálových modelů v MKP softwarech.

Praktická část se bude zabývat výpočtem (kontrolou) hrázového důlního objektu. Nejprve bude proveden zjednodušený analytický výpočet. Následně bude proveden numerický výpočet v MKP řešiči Nastran. Jelikož jsou k dispozici také experimentální výsledky, provede se porovnání analytického a numerického řešení s experimentem.

Cílem diplomové práce je kontrola konstrukčního návrhu důlního hrázového objektu z hlediska pevnosti za pomoci matematického modelování v MKP softwaru a analytického řešení.

2 Rozbor hrázového objektu

Jak již bylo poznamenáno v úvodu, důlní hrázní objekt je jedním z bezpečnostních prvků v dolech a tato práce se bude zabývat právě kontrolou tohoto díla, jehož hlavním prvkem jsou dveře.

Funkčním prvkem hrázového objektu jsou dveře, které oddělují jednotlivé části dolu. V případě výbuchu tvoří hrázové dveře mezi jednotlivými částmi dolu „výbuchovzdornou“ izolaci. Při správném konstrukčním návrhu a technologii výroby dveře mají zadržet zplodiny a tlakovou vlnu o velikosti jednoho megapascalu. Hrázové dveře jsou uzavřeny a otevírají se v případě, kdy má daným místem projet vozík.

Konstrukční provedení hrázových dveří může být různé. Podle základního rozdělení mohou být dveře jednokřídlé či dvoukřídlé. Důlní hrázní objekt se skládá v zásadě z těchto konstrukčních prvků: zárubeň, rám dveří, membrána (může být rovinná nebo vypouklá) a různých vyztužujících prvků, jako jsou například žebra.

Na obrázku 1 je vyfocen hrázový objekt, který je předmětem této diplomové práce. Jak je patrné z tohoto obrázku, jedná se o dvoukřídlé hrázové dveře poměrně mohutné konstrukce.



Obrázek 1 – důlní hrázové dveře

3 Rychlé dynamické děje

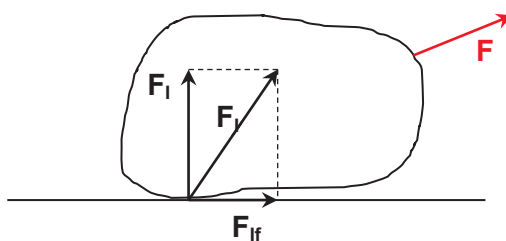
Rázy a teorie přenosů sil v tělesech je oblast, již lidé zkoumají již několik století, avšak vzhledem k značné složitosti dějů, které doprovázejí jak samotné rázy, tak následné přenosy sil v tělesech, není tato problematika zcela probádána.

Ráz je jev, jenž vznikne při kontaktu dvou nebo více těles. Představme si klidnou, nerozčeřenou hladinu libovolného vodního díla. Pustíme-li na hladinu kámen, který na hladinu narazí určitou rychlostí, vzniká ráz a původně „nulová“ rychlost hladiny se změní (vzroste). Taktéž zákonitě musí dojít ke změně rychlosti kamene, který na hladinu dopadl. Jeho rychlost se sníží. Z technického hlediska budeme pro další výklad využívat příkladu rázu dvou pružných tyčí, případně dvou pružných koulí.

Teorii šíření vln a rychlých dějů se věnovali např. Newton a Hertz, kteří vymysleli dvě ze tří teorií. V současnosti máme k dispozici pro řešení teorie šíření vln tyto tři teorie:

- Newtonova elementární teorie rázu
- Vlnová teorie rázu
- Hertzova teorie rázu

Jak již bylo poznamenáno, rázy jsou děje vznikající při dotyku dvou a více těles, přičemž jejich rychlostní vektory jsou různé. Rázové děje jsou doprovázeny náhlou změnou rychlostí těles, která se na rázu podílejí. V teorii rázu většinou vycházíme z představy, že daná tělesa se dotýkají pouze na povrchu v jisté dotykové ploše a rovině. V takovém místě styku pak dochází k přeměně kinetické energie v energii potenciální, tedy může zde vznikat lokální plastická deformace, která je vyvolaná lokálním napětím v tomto místě.



Obrázek 2 – působení sil při rázu

Mějme tedy těleso, které před rázem v důsledku silového působení \mathbf{F} vykonává obecný pohyb v prostoru. Dojde-li k nárazu tohoto tělesa na nějakou překážku, tak v okamžiku rázu na toto těleso bude mimo síly \mathbf{F} působit další síla \mathbf{F}_I , což je rázová síla, viz Obrázek 2. Pokud naše myšlená tělesa budeme považovat za pružná, a pokud se jedno z těles pohybuje tak, že relativní rychlost bodů dotykové plochy není kolmá na dotykovou rovinu, pak je celková rázová síla \mathbf{F}_I výslednicí sil \mathbf{F}_{In} a \mathbf{F}_{If} . Ve stykové ploše tedy vzniká namáhání tlakové

a smykové, přičemž můžeme předpokládat, že síla \mathbf{F}_f je síla třecí, tedy dle obrázku 2 je $\mathbf{F}_{If} = f \cdot \mathbf{F}_{In}$, kde f je koeficient tření.

Z předešlého výkladu vyplývá, že silová působení mezi tělesy na dálku neuvažujeme. Výjimku tvoří pouze mikroskopické částice, kde z hlediska jejich rozměrů toto působení nemůže být opomíjeno.

3.1 Newtonova elementární teorie rázu

První teorií zabývající se rázem těles je *Newtonova elementární teorie rázu*, též označována, jako *stereostatická teorie rázu*. Tato teorie nachází v praxi uplatnění dodnes. Každá teorie vždy vychází z nějakých zjednodušujících předpokladů a podmínek. V případě Newtonovy elementární teorie je třeba uvažovat tuhé těleso a zanedbat délku trvání rázu, protože se jedná o rychlé děje, podle [1] trvající řádově 10^{-4} až 10^{-6} s. Vzhledem k tak krátkému časovému úseku můžeme před, během a po rázu geometrii těles považovat za neměnnou. Také můžeme zanedbat vnější silové účinky působící na tělesa, protože ty jsou v porovnání s velkými rázovými silami nepodstatné.

3.1.1 Centrální přímý ráz

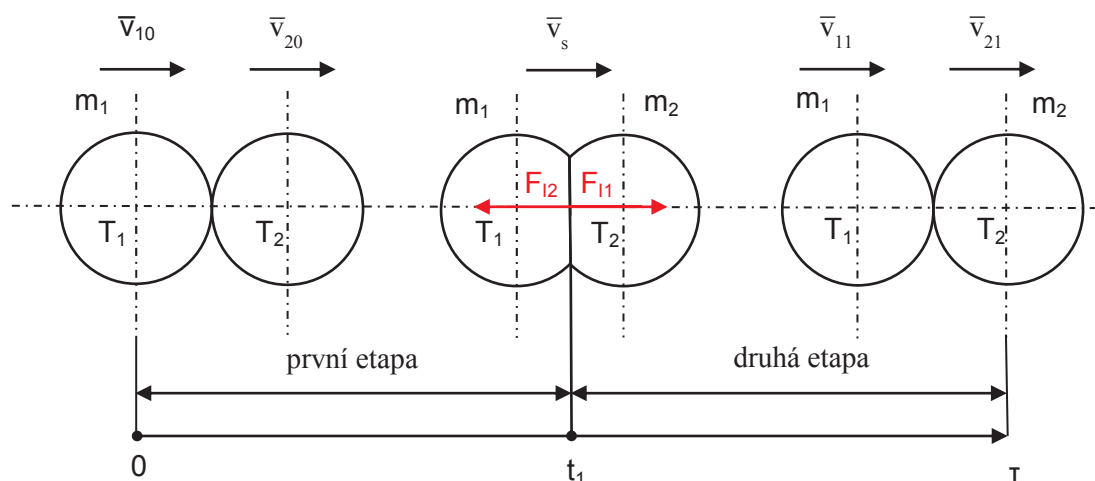
Centrální přímý ráz je nejjednodušším případem, jenž může při rázu vzniknout, a proto jej bude využito k nastínění problematiky rázových dějů a možností Newtonovy elementární teorie.

Uvažujme dvě hmotné koule s hmotnostmi m_1 a m_2 , jejichž rychlostní vektory leží na spojnici středů myšlených koulí. Předpokládejme, že se obě koule pohybují stejným směrem s rychlostmi před nárazem v_{10} a v_{20} , přičemž $v_{10} > v_{20}$. V průběhu rázu označme rychlosti v_1 a v_2 a těsně po rázu v_{11} a v_{12} , jak je znázorněno na obrázku 3. Celý průběh takového rázu může být rozdělen do dvou fází, které si dále popíšeme.

První etapa děje začne v okamžiku, kdy se obě koule navzájem dotknou. Dříve bylo zmíněno, že dochází k přeměně kinetické energie v energii deformační, a to se děje právě v této fázi rázu. Na konci této části děje, označme jej t_1 , se velikosti rychlosti obou koulí shodují a deformace dosahuje svého maxima. Rychlost na konci první etapy můžeme spočítat podle vzorce (3.1).

$$v_s = \frac{m_1 \cdot v_{10} + m_2 \cdot v_{20}}{m_1 + m_2} \quad (3.1)$$

Druhá fáze děje spočívá v tom, že se obě koule vrací do původního stavu. Druhá etapa tedy, začíná v okamžiku, kdy skončila první. Konec druhé etapy nastane, když se obě tělesa od sebe oddělí a následně pokračují v pohybu nezávisle na sobě, každé svou rychlostí. Inverzní průběh má také přeměna energií, tedy deformační energie se přemění v kinetickou.



Obrázek 3 – průběh přímého rázu dvou koulí

Na obrázku 3 je znázorněn celý průběh přímého rázu dvou koulí. Jelikož považujeme obě tělesa za pružná, tak v průběhu rázu se v místě styku obě tělesa deformují a v závislosti na tom v místě styku vzniká spojité zatížení, jehož výslednicí je rázová síla F_I , o které jsme se zmínili již v úvodní kapitole 3 *Rychlé dynamické děje*. Je zřejmé, že velikost rázové síly F_I je funkcí velikosti stykové plochy, takže velikost rázové síly bude na počátku děje nulová, na konci první etapy má své maximum a následně dochází k poklesu její velikosti až je na konci rázu opět nulová. Míra dynamického účinku rázové síly se vyjadřuje impulzem rázové síly

$$I_F = \int_0^\tau F_I dt = \int_0^{t_1} F_I dt + \int_{t_1}^\tau F_I dt = I_{F11} + I_{F12} , \quad (3.2)$$

kde F_I je rázová síla působící na těleso,
 t_1 a t_2 časy trvání jednotlivých etap,
 τ čas trvání rázu,
 I_{F11} a I_{F12} impulzy rázové síly v 1. a 2. etapě rázu.

Na obrázku 4 je znázorněn průběh rázové síly F_I . Jelikož je časový průběh rázové síly spojitá funkce, můžeme impuls rázové síly psát v podobě

$$I_F = \int_0^{\tau} F_I dt = F_{IS} \cdot \tau, \quad (3.3)$$

kde F_{IS} je střední rázová síla

$$F_{IS} = \frac{m(v_1 - v_0)}{\tau}, \quad (3.4)$$

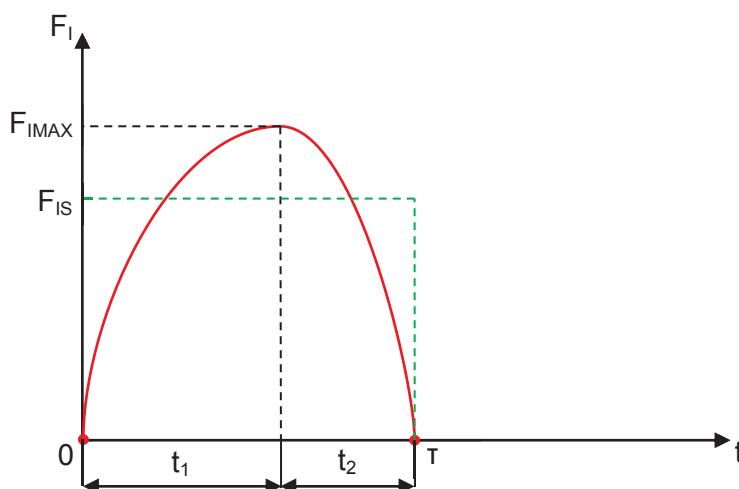
kde v_0 je rychlost tělesa před rázem,
 v_1 rychlost tělesa po rázu,
 m hmotnost tělesa.

Velikosti impulzů rázových sil v jednotlivých etapách rázového děje můžeme vyjádřit z integrálu 3.3. Již sám Newton si uvědomoval skutečnost, že tělesa zúčastněná rázového děje mají rozdílné mechanické vlastnosti, tudíž že schopnosti jednotlivých těles deformovat se budou rozdílné. Zavedl tedy součinitel restituce těles r , kde tuto skutečnost zohlednil. Součinitel restituce byl zaveden následovně

$$r = \frac{\int_{t_1}^{\tau} F_I dt}{\int_0^{t_1} F_I dt}. \quad (3.5)$$

Na základě koeficientu restituce a vztahu (3.1) můžeme dopočítat rychlosti objektů těsně po rázu, rovnice (3.6) a na základě těchto rychlostí můžeme také zkoumat vývoj (ztráty a přírůstky) energií, které se při rázu vyskytují.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} r (v_{10} - v_{20}) \\ v_2 &= \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} r (v_{10} - v_{20}) \end{aligned} \quad (3.6)$$



Obrázek 4 – průběh rázové síly

K tomu abychom určili celkovou změnu energie, potřebujeme nejprve stanovit dílčí změny energií. Takže před samotným rázem má soustava tuto kinetickou energii.

$$E_{k0} = \frac{1}{2}(m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2) \quad (3.7)$$

Na konci rázu bude kinetická energie následující.

$$E_{k1} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \quad (3.8)$$

Nakonec po matematických úpravách bychom našli rovnici pro celkovou změnu kinetické energie.

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - r^2)(v_{10} - v_{20}) \quad (3.9)$$

3.2 Hertzova teorie

Hertzova teorie, nebo také kvazistatická teorie, se navíc oproti Newtonově teorii zaobírá také řešením silových účinků, jež vznikají právě v okamžiku styku dvou těles. Pomocí Newtonovy teorie jsme schopni stanovit kinematický stav těles po ukončení rázového děje, ale nejsme schopni učinit jakékoli platné závěry o velikosti sil v průběhu rázu. I když Hertz stanovil princip, jak zkoumat síly v závislosti na čase, jedná se o přibližnou metodu, protože značná zjednodušení nám zde zanášejí jistou chybu.

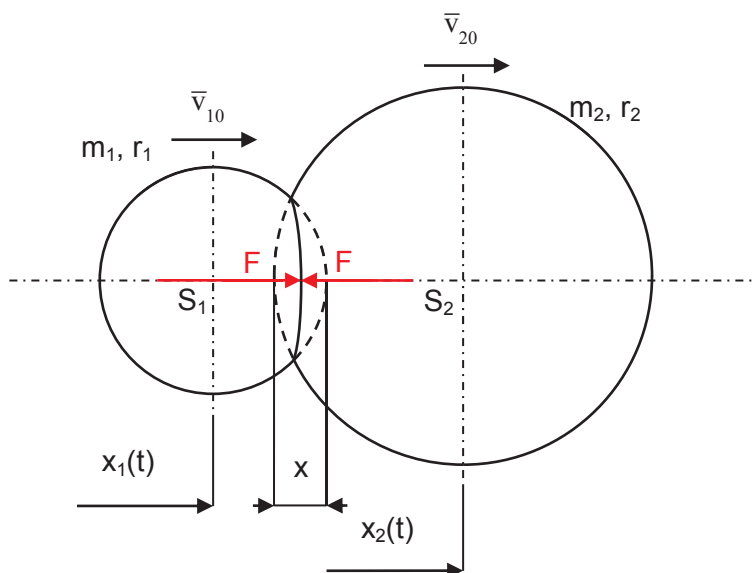
Hertz především uvažoval v místě styku dokonale pružná tělesa se zakřiveným povrchem. Dalším zavedeným předpokladem je úvaha, že v každém okamžiku rázu jsou deformace statické a tedy i zatížení v místě styku těles je statické. Hertz také předpokládal, že energie vlnění je jen malým zlomkem energie, která se v místě styku koncentruje, tedy, že doba trvání rázu je nejméně o řád vyšší než čas, jež potřebuje tlaková vlna k proběhnutí tělesem a následný návrat k místu styku. Hertz odvodil nelineární rovnici mezi přítláčnou silou F a přiblížením středů koulí x , Obrázek 5. Kvazistatická teorie se může využít i při řešení centrálního přímého rázu, avšak pouze, je-li relativní rychlost $(v_{10} - v_{20})$ malá. Obecně se dá říci, že se dá Hertzova teorie použít při malých rychlostech rázu.

$$F = \left(\frac{x}{\alpha_H} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (3.10)$$

kde

$$\alpha_H = \sqrt[3]{\left\{ \frac{9}{64} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \left[\frac{1 - \mu_1}{G_1} + \frac{1 + \mu_2}{G_2} \right]^2 \right\}}, \quad (3.11)$$

kde G_1 a G_2 jsou moduly pružnosti ve smyku,
 μ_1 a μ_2 Poissonovy konstanty,
 α_H koeficient.



Obrázek 5 – styk koulí při rázu

3.3 Vlnová teorie

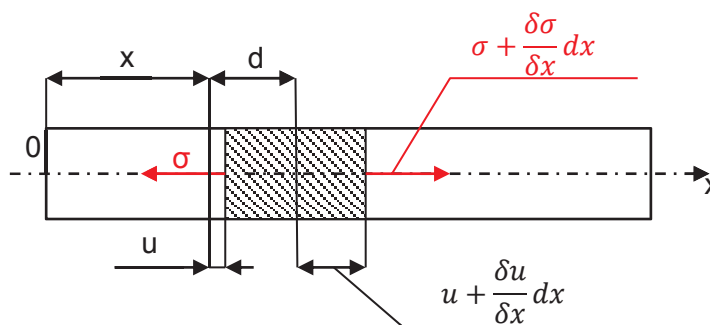
Vlnová teorie rázu je nejmladší teorií, jež vznikla na základě otázek souvisejících s rázovými ději, které se Newtonovi ani Hertzovi nepodařilo objasnit. Vlnová teorie je velmi rozsáhlá a rozebírá několik druhů zatížení rázem, které byly s vývojem civilizace nutné řešit. Vlnová teorie je úzce spjata s problematikou přenosu sil v tělesech, tedy šířením napětových vln. S tím, že se v neomezeném pružném prostředí mohou šířit pouze dva druhy vln, poprvé přišel Poisson [1]. Jedná se o:

- vlny podélné
- vlny příčné

Proto se v další výkladu zaměříme na principy prostupu a šíření napětových vln v tělesech. Při výkladu budeme uvažovat pružnou prizmatickou tyč (nosník).

3.3.1 Šíření podélných napěťových vln

Mějme prizmatickou pružnou tyč s velmi malými příčnými rozměry ve srovnání s délkou, Obrázek 6, a uvažujme, že tyč je zatížena tlakem. V rámci tohoto zatížení se tyč bude deformovat jak v podélném, tak v příčném směru. Avšak pro zjednodušení zatím nebudeme uvažovat příčnou deformaci.



Obrázek 6

Jak je vidět na obrázku 6, tak průřez ve vzdálenosti x od počátku se posune o vzdálenost u , přičemž se nedeformuje. Vybereme-li si na tyči element a na něj si zakreslíme napětí, která zde v rámci tlakového zatížení budou, můžeme pohyb tyče pro náš vyjmutý element popsat pohybovou rovnicí (3.12).

$$A \frac{\delta \sigma}{\delta x} dx = \rho A dx \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}, \quad (3.12)$$

kde levá strana rovnice je výsledná síla působící na element a

$\rho \cdot A \cdot dx$ je hmotnost,

$\delta^2 x / \delta t^2$ zrychlení.

Vztah (3.12) můžeme dělením upravit do následující podoby

$$\frac{\delta \sigma}{\delta x} = \rho \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta t^2}. \quad (3.13)$$

Dále můžeme využít Hookova zákona

$$\sigma = E \frac{\delta u}{\delta x}, \quad (3.14)$$

takže rovnice (3.13) po zavedení konstanty c_n bude mít tento tvar

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = c_n^2 \cdot \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}, \quad (3.15)$$

kde

$$c_n^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (3.16)$$

Předchozí rovnice (3.15) je hyperbolického typu a jedná se o *vlnovou rovnici*, jejímž obecným řešením je následující rovnice (3.17). Tato rovnice reprezentuje pohyb dvou vln, šířících se opačným směrem vůči sobě s rychlostí c_n .

$$u = f(x - c_n t) + g(x + c_n t) \quad (3.17)$$

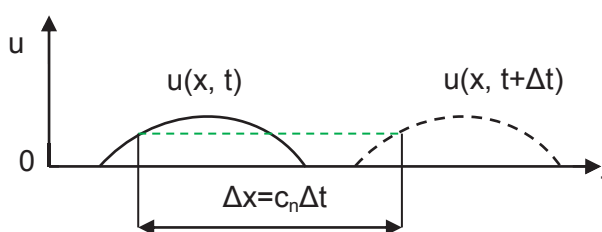
Pro názornost nyní budeme předpokládat nulovou funkci g , takže budeme mít vlnovou rovnici v následném tvaru.

$$u = f(x - c_n t) \quad (3.18)$$

Zvětší-li se čas t o přírůstek Δt a vzdálenost x o přírůstek $\Delta x = c_n \cdot \Delta t$, pak se velikost výrazu $(x - c_n t)$ v rovnici (3.18) nezmění, takže i posuv u bude mít stejnou hodnotu. Jak je vidět na obrázku 7, tak posuvy v časech t i $t + \Delta t$ si jsou rovny. Jsou pouze posunuty o vzdálenost $\Delta x = c_n \cdot \Delta t$. Přitom můžeme veličinu c_n vyjádřit, jako podíl přírůstků času a vzdálenosti.

$$c_n = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.19)$$

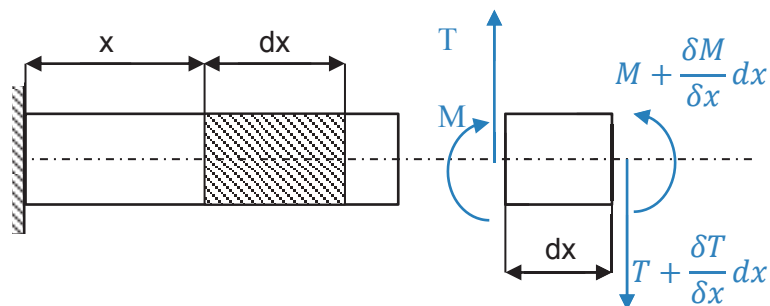
Rovnice (3.19) tedy vyjadřuje, jakou rychlostí se vlna v čase šíří. Z obrázku 7 vyplývá ještě závěr, že se jedná o podélnou rovinnou vlnu, protože posuv u se děje ve směru x a navíc posuv u bude ve stejném okamžiku v jedné rovině. Nutno poznamenat, že rychlost pohybu vlny s rychlostí hmotných částic tyče nikterak nesouvisí.



Obrázek 7 – znázornění posuvů podél tyče

3.3.2 Šíření ohybových vln v nosníku

Uvažujme opět hmotnou tyč, na níž si vyjmeme nekonečně malý element, Obrázek 8. Tak jako v předchozí kapitole vyjdeme i nyní z pohybové rovnice.



Obrázek 8

$$A \frac{\delta \sigma}{\delta x} dx = \rho A dx \cdot \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} \quad (3.20)$$

Pokud zanedbáme rotační setrvačnost elementu, dostaneme z rovnováhy momentů, jež působí na element rovnici (3.21), což je známá Schwedlerova věta.

$$T = \frac{\delta M}{\delta x} \quad (3.21)$$

Využijeme-li ještě rovnice (3.22), což je rovnice průhybové čáry nosníku dle Bernoulliho teorie, tak získáme vztah (3.23).

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} = -\frac{M}{EJ} \quad (3.22)$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta t^2} = -\frac{EJ}{A\rho} \frac{\delta^4 v}{\delta x^4} \quad (3.23)$$

Nyní do rovnice (3.23) zavedme vztah (3.16), který vyjadřuje rychlost podélných vln, a poloměr setrvačnosti

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}, \quad (3.24)$$

pak dostaneme

$$\frac{\delta^2 v}{\delta t^2} = -i^2 c_n \frac{\delta^4 v}{\delta x^4}, \quad (3.25)$$

což je vlnová rovnice. Nyní se jedná o rovnici parabolického typu, do které dosadíme kupříkladu

$$v = f(x - c \cdot t), \quad (3.26)$$

kde c je rychlost postupující vlny.

Dosazením rovnice (3.26) do rovnice (3.25) tedy získáme

$$c^2 - g''(x - ct) = -c_0 k^2 g^{IV}(x - ct) \quad (3.27)$$

a zjistíme, že dané řešení nevyhovuje. Vlny se nosníkem totiž nemohou šířit, aniž by došlo ke změně jejich tvarů, dochází zde k disperzi vln. Přesvědčit se o tom můžeme tak, že budeme předpokládat řešení rovnice (3.27) ve tvaru

$$v = v_0 e^{i(x \pm ct)p} \quad (3.28)$$

a například pro sinusovou vlnu by platilo

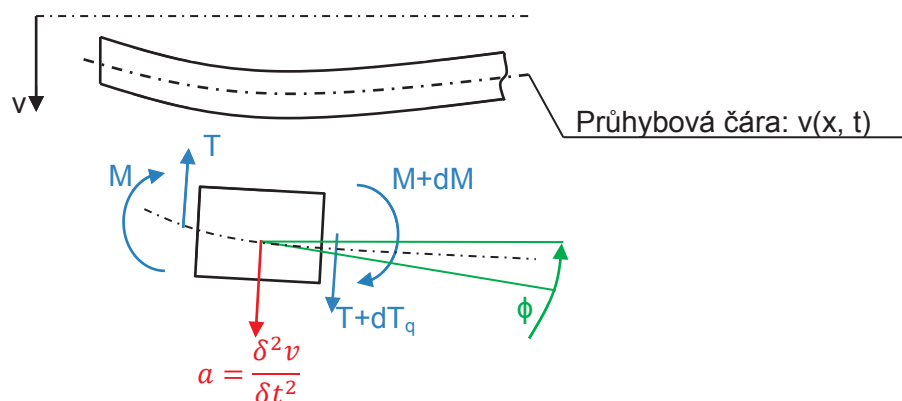
$$v(x, t) = v_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right]. \quad (3.29)$$

Dosadíme-li z rovnice (3.28) do (3.25), úpravami pak získáme rovnici pro fázovou rychlost vlny.

$$c = c_n 2\pi \left(\frac{i}{\lambda} \right) \quad (3.30)$$

$$\frac{c}{c_n} = 2\pi \left(\frac{i}{\lambda} \right) \quad (3.31)$$

Musíme však poukázat na značná zjednodušení při odvození rovnice (3.25), kde byl zanedbán vliv rotace hmotných elementů nosníku a vliv posouvající síly na průhyb. Posouvající síla způsobí zvlnění původně rovinných řezů a také ovlivní průhyb tyče. Ve výsledku je průhyb nosníku dán superpozicí ohybu a smyku. Zpřesněným řešením se zabýval nejprve Rayleigh a následně také Timošenko.



Obrázek 9 – znázornění úhlu pootočení ohybové čáry

Nejdříve se zaměříme na vliv rotace prvků nosníku. Budeme předpokládat, že úhel pootočení ohybové čáry bude dostatečně malý, tudíž můžeme psát

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\delta v}{\delta x} \cong \phi . \quad (3.32)$$

Úhlové zrychlení našeho elementu nosníku pak je

$$\frac{\delta^3 v}{dx dt^2} = \frac{\delta^2 \phi}{\delta t^2} , \quad (3.33)$$

pak rovnici rovnováhy můžeme psát ve tvaru

$$\rho J \frac{\delta^3 v}{dx dt^2} dx = T dx - \frac{\delta M}{\delta x} dx . \quad (3.34)$$

Dosadíme-li do vztahu (3.34) z rovnice ohybové čáry, rovnice (3.22), dostaneme

$$T = -EJ \frac{\delta^3 v}{\delta x^3} + \rho J \frac{\delta^3 v}{\delta x \delta t^2} \quad (3.35)$$

a po dosazení do (3.20) a úpravách získáme novou pohybovou rovnici pro náš element.

$$\frac{\delta^2 v}{\delta t^2} = -c_n^2 i^2 \frac{\delta^4 v}{\delta x^4} + i^2 \frac{\delta^4 v}{\delta x^2 \delta t^2} . \quad (3.36)$$

Smíšená čtvrtá derivace na pravé straně rovnice (3.36) zohledňuje právě vliv natočení prvků. Nyní dosadíme rovnici (3.28) do (3.36) a dostaneme fázovou rychlost sinusové příčné vlny.

$$\frac{c}{c_n} = 2\pi \frac{i}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \left(\frac{i}{\lambda}\right)^2}} \quad (3.37)$$

Při hlubším zkoumání vzorce, však zjistíme, že ani tento vztah není přesný, protože pro vlny s vysokou hodnotou λ dostaneme opět rovnici (3.30), resp. (3.31).

Další korekce zohledňuje vliv posouvající síly, tu zavedl do výpočtu Timošenko. Nebudeme se však zabírat celým řešením, pouze jej naznačíme a k dalšímu studiu odkážeme na [2].

Timošenko vyházel z předpokladu, že úhel sklonu tečny ohybové čáry je dán součtem úhlu natočení nosníku ψ (vyvolaný ohybem) a úhlové změny β (vyvolaný posouvající silou), kterou vyvolá smykové zatížení.

$$\phi = \psi + \beta , \quad (3.38)$$

tedy

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \psi + \beta . \quad (3.39)$$

Následně po odvození rovnice rovnováhy můžeme vyjádřit rovnici (3.40), což je opět pohybová rovnice vyjmutého elementu.

$$\rho A \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} = \frac{\delta T}{\delta x} \quad (3.40)$$

Po matematických úpravách se dostaneme k rovnici (3.41) vyjadřující fázovou rychlost vlnění.

$$c_n^2 i^2 \frac{\delta^4 v}{\delta x^4} + \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} - i^2 \left[1 + \frac{2(1+\mu)}{\alpha} \right] \frac{\delta^4 v}{\delta x^2 \delta t^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{i^2}{c_2^2} \frac{\delta^4 v}{\delta t} = 0 , \quad (3.41)$$

kde c_2 je rychlost smykových vln.

$$c_2 = \frac{G}{\rho} . \quad (3.42)$$

3.3.3 Šíření podélných napěťových vln v tyči s bilineárním pracovním diagramem

Uvažujme opět prizmatickou tyč a zobecníme řešení z 3.3.1 *Šíření podélných napěťových vln* pro bilineární materiálový model, Obrázek 10. Připomeňme platnost Hookova zákona, je-li splněna podmínka, že napětí σ je menší, než napětí na mezi kluzu σ_Y .

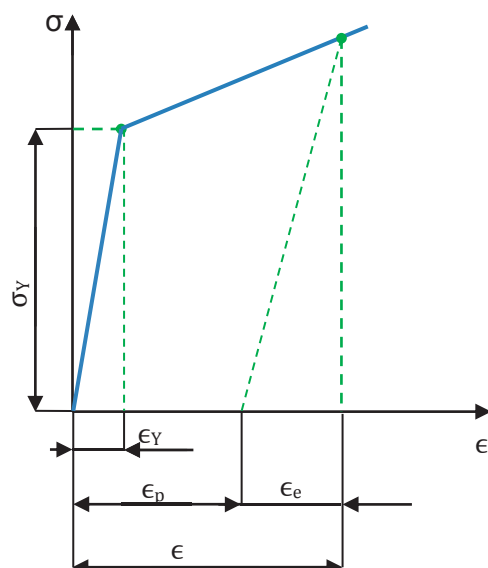
$$\sigma = E\epsilon \quad (3.43)$$

Dále potřebujeme znát rychlost napěťové vlny, jež se daným prostředím šíří. Ta je dána vztahem (3.16), tedy

$$c^2 = \frac{E}{\rho} . \quad (3.44)$$

Pokud dojde k překročení napětí na mezi kluzu, můžeme po kombinaci rovnice (3.43) a (3.44) vyjít z následující nerovnice (3.45) pro rychlost hmotných částic tyče.

$$v > \frac{\sigma_Y}{\sqrt{E\rho}} \quad (3.45)$$



Obrázek 10 – bilineární materiálová charakteristika

Při pohybu částic tyče tedy dojde k poměrnému zkrácení či prodloužení tyče, které bude dáno superpozicí elastického ϵ_e a plastického příspěvku ϵ_p .

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (3.46)$$

Zavedme nový pojem, *modul plasticity* a označme jej, P . Potom můžeme zavést formuli (3.48), která vyjadřuje vztah mezi napětím σ a poměrným prodloužením ϵ a platí, pokud je splněno následující tvrzení (3.47).

$$\sigma > \sigma_Y, \text{ resp. } \epsilon > \epsilon_Y \quad (3.47)$$

$$(\sigma - \sigma_Y) = P(\epsilon - \epsilon_Y) \quad (3.48)$$

V plastické oblasti pro rychlost napěťové vlny platí rovnice (3.49).

$$c_p^2 = \frac{P}{\rho} \quad (3.49)$$

Z předešlého výkladu plyne, že prizmatickou tyčí se budou šířit dvě napěťové vlny. Předpokládejme, že levý konec tyče je náhle uveden do pohybu tahovou silou, kdy rychlost tohoto pohybu je dána nerovnicí (3.50).

$$v > \frac{\sigma_Y}{\sqrt{E\rho}} \quad (3.50)$$

První napěťová vlna je elastická s rychlostí c_e při napětí na mezi kluzu σ_Y a druhá vlna je plastická při napětí σ s rychlostí c_p .

$$c_e^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.51)$$

$$c_p^2 = \frac{P}{\rho} \quad (3.52)$$

Vzniklé vlny jsou tahového charakteru a dochází k jejich složení, tudíž v oblasti, již prošly obě vlny je pak napětí σ a poměrné prodloužení ϵ .

3.3.4 Šíření podélných napěťových vln v tyči s obecným pracovním diagramem

Vyděme-li z obrázku 6 a provedeme substituci z napětí na síly, které na element působí, dostaneme upravenou pohybovou rovnici (3.12) ve tvaru (3.53).

$$d(\bar{A}\bar{\sigma}) = \rho A dx \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} \quad (3.53)$$

Síla, která působí na levém konci nosníku je

$$\bar{F} = \bar{A}\bar{\sigma}, \quad (3.54)$$

potom je jmenovité napětí

$$\sigma = \frac{\bar{F}}{A} = \frac{\bar{A}\bar{\sigma}}{A}. \quad (3.55)$$

Zavedme ještě úplný diferenciál pro posuv hmotných částic v podélném směru, viz rovnice (3.56).

$$d\epsilon = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx \quad (3.56)$$

Vydělením formulace (3.53) rovnicí (3.56), vykrácením plochou A a dalšími matematickými úpravami získáváme rovnici (3.57), ze které při srovnání s rovnicí (3.15) dostaneme vztah pro stanovení rychlosti, kterou se budou podélné vlny šířit.

$$c_p = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\epsilon}}, \quad (3.57)$$

kde $d\sigma/d\epsilon$ je směrnice čáry $\sigma = \sigma(\epsilon)$, viz Obrázek 11. Při hledání rychlosti hmotných částic tyče bychom došli k tomuto integrálu

$$v = \int_0^{\epsilon_1} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\epsilon}} d\epsilon = \int_0^{\epsilon_1} c_e \sqrt{\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\epsilon}} d\epsilon. \quad (3.58)$$

Integrál (3.58) však můžeme vyčíslit pouze, pokud platí

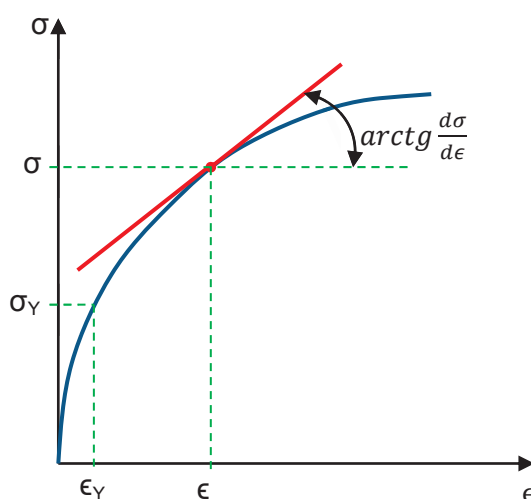
$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} \geq 0. \quad (3.59)$$

Při překročení této podmínky by dále rychlost nemohla narůstat a došlo by k lomu. Pokud tedy nesmí dojít k porušení nosníku, musí platit

$$v_c > v, \quad (3.60)$$

kde v_c je Kármánova kritická rychlost.

$$v_c = \int_0^{\epsilon_P} c_e \sqrt{\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\epsilon}} d\epsilon \quad (3.61)$$



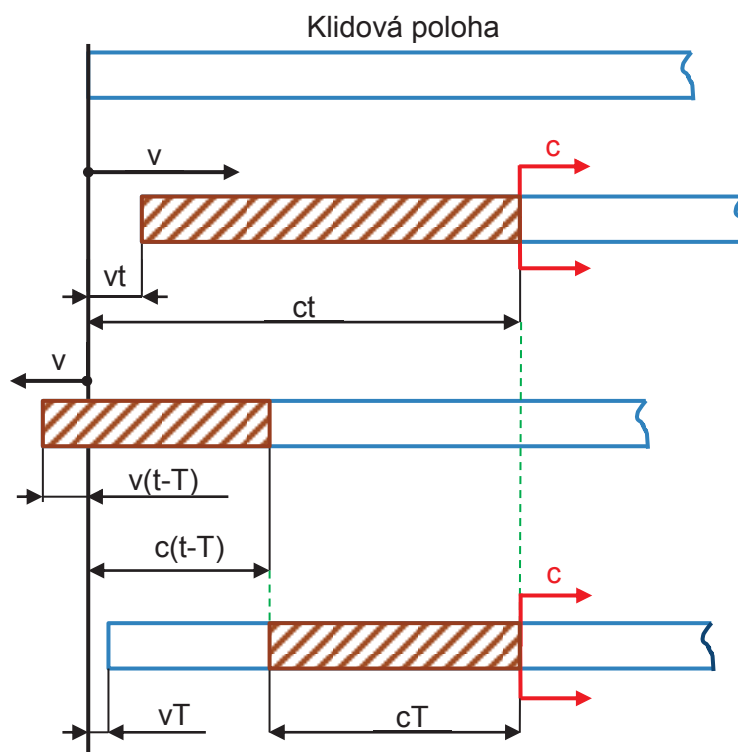
Obrázek 11

3.4 Superpozice a odraz podélných napět'ových vln

Jelikož je vlnová rovnice (3.15) lineární bude platit princip superpozice. Představme si nosník, který je na počátku v klidu, Obrázek 12.

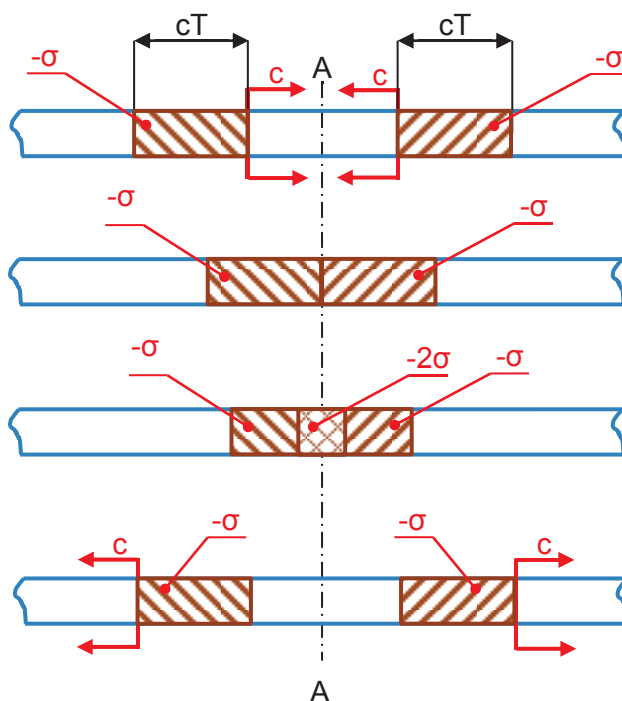
Na tento nosník náhle zapůsobí tlakové zatížení, které způsobí tlakovou napět'ovou vlnu šířící se nosníkem v podélném směru (postup napět'ového pulsu je na obrázku 12 znázorněn šrafovanou oblastí). Vzdálenost, do které se tato tlaková vlna za čas t dostane, je ct . Dále

k této vlně můžeme superponovat tahovou vlnu, která vznikne opět pohybem levého konce tyče stejnou rychlostí v , ale v opačném směru s jistým zpožděním. Na konci tohoto děje se nosník dostane opět do klidového stavu, avšak levý konec nosníku je ve výsledku posunut do vzdálenosti vT .



Obrázek 12 – superpozice napěťových pulsů

K prezentaci odrazu napěťového pulsu vyjdeme z obrázku 13, kde uvažujeme nosníky polonekonečné délky, jenž jsou vetknuty v rovině $A - A$. Šrafované oblasti nám opět představují napěťový puls šířící se nosníkem. V první fázi si představme, že se nosíky zrcadlově šíří dva totožné tlakové pulsy. Oba pulzy se v rovině $A - A$ střetnou a následně odrazí, přičemž v době střetu je v rovině $A - A$ dvojnásobné tlakové napětí. V místě kontaktu obou pulsů tedy nedojde k žádnému posuvu. Odražené napěťové vlny jsou stejného charakteru, tedy tlakové. Pokud bychom provedli stejnou demonstraci srážky vlny tlakové a tahové, došli bychom podle [3] k závěru, že na dokonale vetknutém konci se napěťová vlna odráží se stejným znaménkem, na volném konci s opačným.



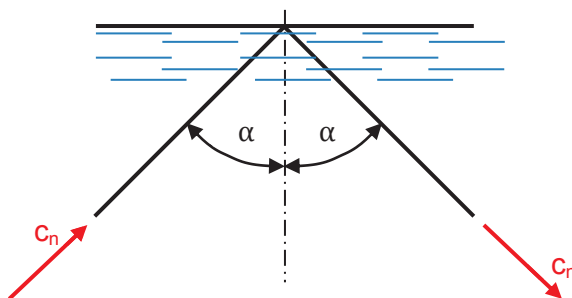
Obrázek 13 – princip odrazu napětových vln

3.5 Odraz a lom podélných a příčných vln

Obrázek 14 reprezentuje zákon o úhlu odrazu, jenž se rovná úhlu dopadu, který nastane při nejjednodušší interpretaci odrazu a lomu vln. Tím je odraz podélných vln o vodní hladinu, nad níž je vakuum. Dále se omezíme na rovinné vlny i rozhraní. Rychlost podélných vln v ideálně stlačitelné kapalině je dána vztahem

$$c_n = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (3.62)$$

kde K je modul stlačitelnosti kapaliny.



Obrázek 14 - odraz podélných vln na vodní hladině

Z obrázku 15 vyplývá, že než se bod A' rovinné vlny AA' dostane do bodu B , tak uplyne čas

$$\Delta t = \frac{A'B}{c_n}, \quad (3.63)$$

přičemž za stejný časový úsek urazí vlna na hladině vzdálenost

$$AB = c^* \Delta t. \quad (3.64)$$

Potom úpravou formulací (3.63) a (3.64) dostáváme fázovou rychlost podélných vln na vodní

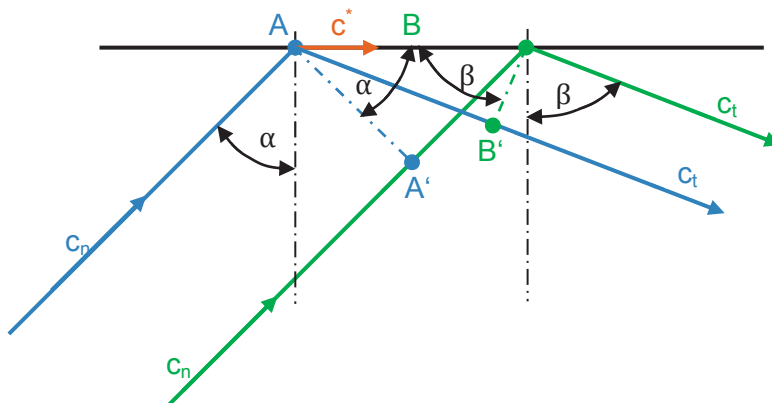
$$c^* = \frac{c_n}{\sin \alpha}. \quad (3.65)$$

Pro fázovou rychlost příčných vln bychom dostali obdobný vztah

$$c^* = \frac{c_t}{\sin \beta}, \quad (3.66)$$

což plyne i z obrázku 15. Dále srovnáním fázové rychlosti podélné vlny (3.65) a (3.66) dostaneme formuli

$$\frac{c_n}{\sin \alpha} = \frac{c_t}{\sin \beta}. \quad (3.67)$$



Obrázek 15 – odraz a lom podélných vln ve vakuu

Pro obecné případy, uvažujeme, že se odraz a lom děje na rozmezí dvou pružných prostorů. Zákony odvodíme z následujících tvrzení dle [1]:

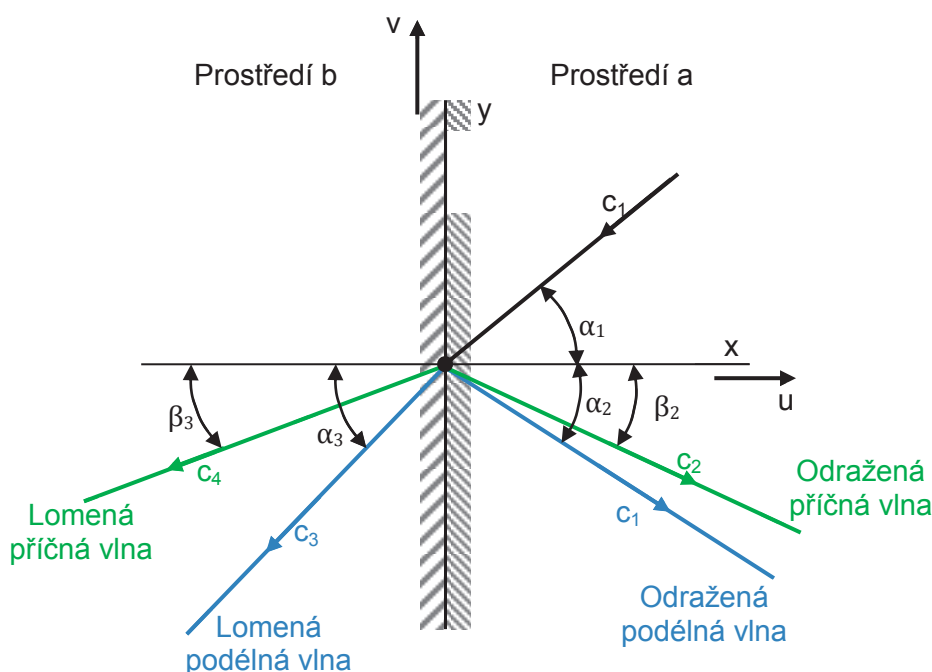
- rovnost normálových posuvů,
- rovnost tečných posuvů,
- stejná normálová napětí.
- stejná smyková napětí.

Dopad podélné vlny na rozmezí prostředí a a b vede ke vzniku dalších čtyř vln. Jedná se o odraženou podélnou a příčnou vlnu, dále pak o lomenou podélnou a příčnou vlnu. Na základě tvrzení uvedených výše pak můžeme vyjádřit čtyři okrajové podmínky a na základě nich dojdeme ke vztahu

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2} = \frac{\sin \beta_2}{c_2} = \frac{\sin \alpha_3}{c_3} = \frac{\sin \beta_3}{c_4}, \quad (3.68)$$

kde c_1 je rychlost podélné vlny v prostředí a ,
 c_2 rychlost příčné vlny v prostředí a ,
 c_3 je rychlost podélné vlny v prostředí b ,
 c_4 rychlost příčné vlny v prostředí b .

Uvedený příklad je demonstrován obrázkem 16.

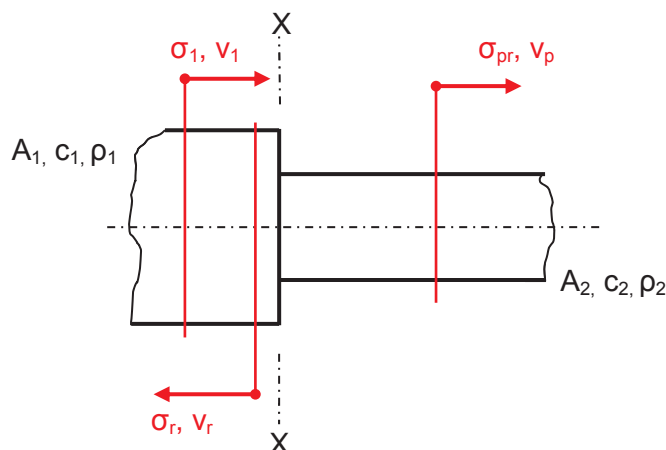


Obrázek 16 - odraz a lom podélné vlny na rozhraní dvou elastických prostředí

3.6 Přestup podélných vln

Nyní jen ve stručnosti nastíníme možnost řešení přestupu podélných napěťových vlny na rozhraní pružných prostorů. Vyšetřeme přestup podélných vln na rozhraní dvou pružných tyčí, Obrázek 17. Představme si, že jsou obě tyče pevně spojeny. Zleva nám začne

postupovat napěťová vlna σ_1 rychlostí c_1 , přitom rychlost hmotných částic je v_1 . V místě, kde jsou obě tyče pevně spojené (rovina $X - X$) se tato vlna z části odrazí a z části projde.



Obrázek 17 – přestup podélných napěťových vln

Předpokládejme, že vzájemně přenášená síla v rovině $X - X$ mezi oběma tyčemi je totožná stejně tak, jako rychlost hmotných částic. Matematicky tato tvrzení můžeme vyjádřit následovně. Rovnost sil

$$A_1(\sigma_1 + \sigma_r) = A_2\sigma_{pr} \quad (3.69)$$

a rovnost rychlostí hmotných částic

$$v_1 - v_r = v_p. \quad (3.70)$$

σ_r je napětí v odražené vlně,

σ_{pr} napětí v procházející vlně,

v_r rychlost odražené vlny,

v_p rychlost procházející vlny.

V souvislosti s přestupem vln ještě zavedme rychlost hmotných částic tyče, rovnice (3.71), která vyplývá ze vztahu (3.18) a nakonec ještě napětí, které bude v tyči rovnice (3.72), kterou získáme ze substituce vztahů (3.14), (3.16) a (3.71).

$$v = -c_n \frac{\delta u}{\delta x} \quad (3.71)$$

$$\sigma = -\rho c_n v \quad (3.72)$$

Potom můžeme určit napětí v odražené vlně σ_r a v procházející vlně σ_p tak, že rovnici (3.70) vynásobíme $\rho_1 c_1$, využijeme vztahu (3.72) a získáme

$$\sigma_1 - \sigma_r = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \sigma_{pr} . \quad (3.73)$$

Konečně využitím formulí (3.69) a (3.73) dostaneme hledaná napětí.

$$\sigma_r = \frac{A_2 \rho_2 c_2 - A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2 + A_1 \rho_1 c_1} \cdot \sigma_1 \quad (3.74)$$

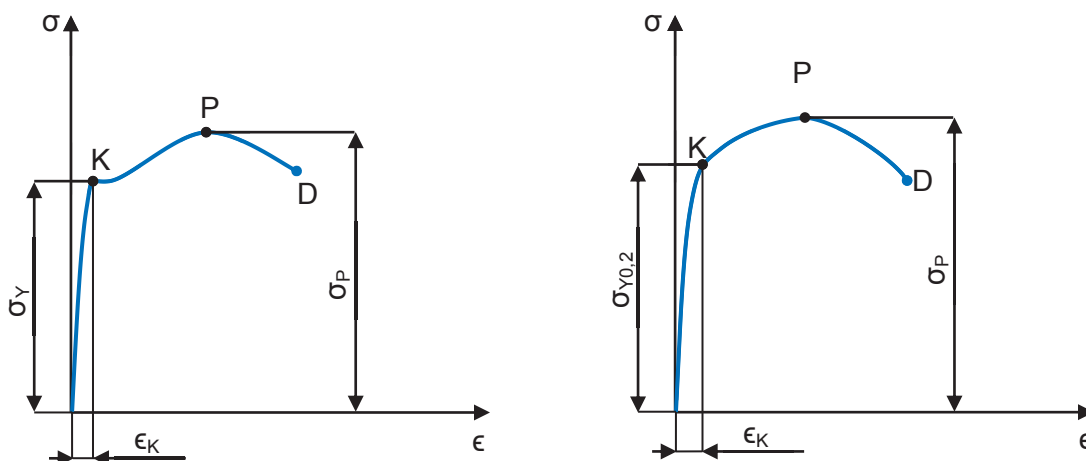
$$\sigma_{pr} = \frac{2A_1 \rho_2 c_2}{A_2 \rho_2 c_2 + A_1 \rho_1 c_1} \cdot \sigma_1 \quad (3.75)$$

4 Plasticita

Plasticita je vnímána, jako schopnost tuhých těles deformovat se nevratným způsobem za působení vnějších silových účinků, přičemž při deformaci nedochází k porušení materiálu. Plastické deformace vzniknou při zatížení materiálu nad mezí kluzu σ_y , přičemž i po odlehčení materiál zůstává zdeformován. Tento jev je dán skutečností, že zatížení a následné odlehčení materiálu se neděje podle stejných principů. Teorie plasticity se rozvíjí ve dvou směrech. Jedním pohledem na teorii plasticity je fyzikální pohled a druhým je matematický.

Fyzikální pohled se zabývá strukturou materiálu a na základě těchto studií je snaha určit mechanické vlastnosti materiálu v celé oblasti plastické deformace. Matematický směr vychází z experimentálně získaných výsledků chování materiálu a rozšiřuje poznatky z oblasti pružných deformací o oblast deformací plastických.

Proces plastického přetvoření je složitý a závisí na několika faktorech. Uvedme třeba vliv napjatosti, teploty, rychlosti tváření či vnějšího tření, viz [4]. Formulace charakterizující vznik plastických deformací byly řešeny několika autory, a podle druhu napjatosti je můžeme rozdělit na podmínky plasticity při jednoosé napjatosti a na podmínky plasticity při víceosé napjatosti. Podmínku plasticity můžeme obecným matematickým zápisem vyjádřit, jako funkci $f = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_y, T)$. Dalším vlivem, který se podílí na plasticitě je rychlost deformace.



Obrázek 18 – vlevo smluvní pracovní diagram pro měkkou ocel a vpravo smluvní pracovní diagram pro houževnatý materiál

4.1 Pracovní diagram a jeho aproximace

V dalším textu se zaměříme na možnosti aproximace pracovních diagramů, které při výpočtech v oblasti trvalých deformací potřebujeme stejně, jako v oblasti pružných deformací. Zavedení funkce, jež by přesně vystihovala průběh pracovního diagramu v celé oblasti, by bylo příliš složité, tudíž je nutné využít aproximace smluvního pracovního diagramu.

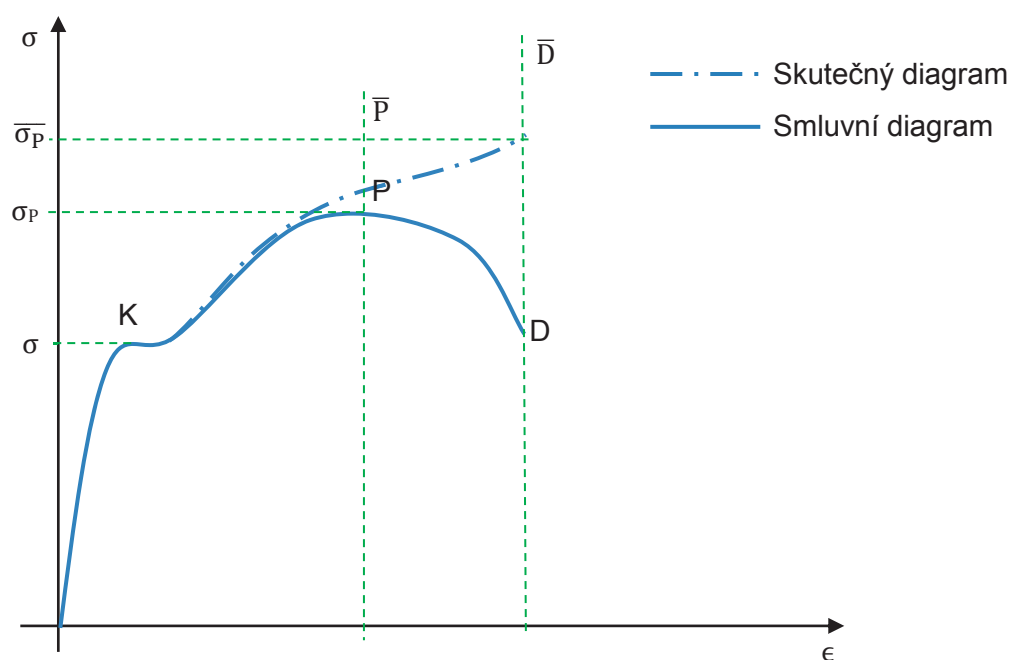
4.1.1 Tahová zkouška a pracovní diagramy

Připomeňme, že nejčastějším způsobem získání výsledků pro vykreslení smluvního diagramu, Obrázek 18, je tahová zkouška prováděna zpravidla na normalizovaném zkušebním vzorku. Z trhacího stroje bývají výstupem nejčastěji přímo měřitelné veličiny, absolutní prodloužení Δl a zatěžující síla, které jsou hned zakresleny do grafu. Tyto veličiny následně přepočítáváme nejčastěji na napětí

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (4.1)$$

a poměrnou deformaci

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4.2)$$

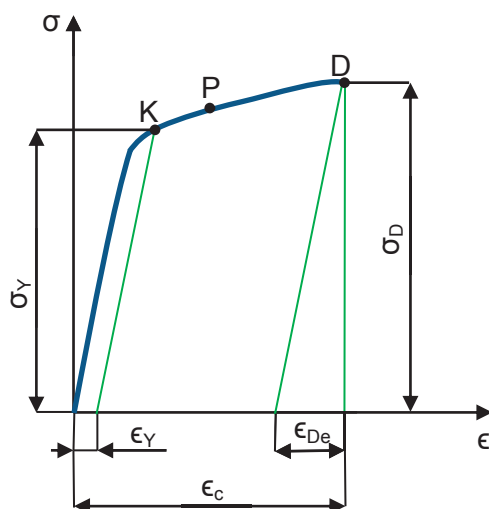


Obrázek 19 – porovnání skutečného a smluvního diagramu

Mluvíme-li o smluvním pracovním diagramu, máme na mysli diagram vykreslen na základě smluvní hodnoty meze pevnosti σ_p v oblasti PD . Avšak oblast PD bude ve skutečnosti vypadat jinak, Obrázek 20, což je skutečný pracovní diagram. Nacházíme-li se tedy v oblasti plasticity a porovnáme-li oba diagramy, zjistíme, že chyba při výpočtu s použitím smluvního pracovního diagramu a rostoucí plastickou deformaci roste. K porušení tedy dojde až při nejvyšším skutečném napětí

$$\sigma_D = \frac{F_D}{A_D}, \quad (4.3)$$

kde σ_D je skutečné napětí,
 F_D maximální dovolená síla,
 A_D průřez v okamžiku porušení materiálu.



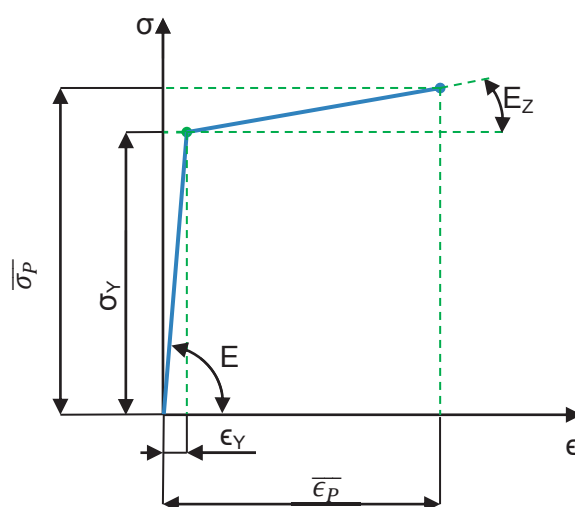
Obrázek 20 – skutečný pracovní diagram pro houževnatý materiál

4.1.2 Aproximace pracovního diagramu

V předchozí kapitole 4.1.1 *Tahová zkouška a pracovní diagramy* jsme se zmínili o aproximaci pracovních diagramů a řekli jsme si také, proč se pracovní diagramy aproximují. Nyní se podíváme na možnosti aproximace různých pracovních diagramů.

4.1.3 Aproximace pracovního diagramu lomenou přímkou

Aproximace smluvního diagramu lomenou přímkou je nejjednodušší a hojně využívaná metoda, Obrázek 21. Takto může být aproximován pracovní diagram jak pro ideálně plastický materiál, tak i pro plastický materiál. Ještě pro doplnění uveďme, že na vodorovnou osu pracovního diagramu nemusí být vždy vynesena poměrná deformace, takže kromě grafu $\epsilon - \sigma$, můžeme také dostat třeba pracovní diagramy $e - \sigma$ nebo $\psi - \sigma$, kde e je přirozená (logaritmická) deformace a ψ je kontrakce krčku. Předvedeme si pouze aproximaci lomenou přímkou pro pracovní diagram $\epsilon - \sigma$. Další možnosti aproximace jsou uvedeny například v [4].



Obrázek 21 – příklad aproximace skutečného pracovního diagramu lomenou křivkou

Z rovnice (4.3) pro skutečné maximální napětí vyplývá, že maximální síla F_p na smluvní mezi pevnosti bude

$$F_p = \sigma_p \cdot A_p . \quad (4.4)$$

Extrémy funkcí můžeme z matematiky zjistit pomocí první derivace, takže pro rovnici (4.4) musí platit následující tvrzení.

$$dF_p = d\sigma_p \cdot A_p + \sigma_p \cdot dA_p = 0 \quad (4.5)$$

V plastické oblasti můžeme zanedbat pružnou změnu objemu a předpokládat jeho stálost. Musí tedy platit, že

$$A_p \cdot l_p = A_0 \cdot l_0 , \quad (4.6)$$

kde A_0 je původní průřez (před zatížením),

l_0 původní délka,

A_P průřez při napětí na mezi pevnosti,

l_P délka po deformaci na mezi pevnosti.

Po matematických úpravách nám ze vztahu (4.6) vyjde velikost průřezu na smluvní mezi pevnosti A_P .

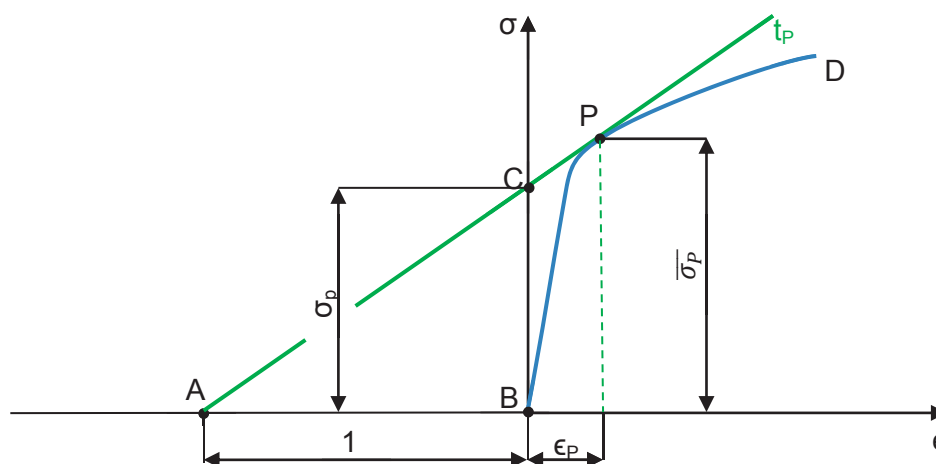
$$A_P = \frac{A_0}{1 + \epsilon_P} \quad (4.7)$$

Takže dále po dosazení derivované rovnice (4.7) a rovnice (4.7) v nederivovaném tvaru do vztahu (4.5), dostaneme tuto formulaci.

$$d\sigma_P \frac{A_0}{1 + \epsilon_P} - \bar{\sigma}_P \frac{A_0}{(1 + \epsilon_P)^2} d\epsilon_P = 0 \quad (4.8)$$

Nakonec z rovnice (4.8) po matematických úpravách můžeme vyjádřit rovnici (4.9), která udává, že tečna vedená v bodě P pracovního diagramu na vodorovné ose vytíná jednotkový úsek, viz Obrázek 22.

$$\frac{d\sigma_P}{d\epsilon_P} = \frac{\bar{\sigma}_P}{1 + \epsilon_P} \quad (4.9)$$



Obrázek 22 – Vlastnosti (aproximace) skutečného pracovního diagramu pro houževnatý materiál

Podobným způsobem bychom mohli také odvodit další vztahy pro diagram $\epsilon - \sigma$, ale ve stručnosti jen uvedme rovnici (4.10), ze které stanovíme skutečné napětí na mezi pevnosti, viz [4], str. 77.

$$\bar{\sigma}_P = \sigma_P \frac{A_0}{A_P} \quad (4.10)$$

4.1.4 Aproximace pracovního diagramu parabolou

Parabolickou aproximaci si ukážeme pro pracovní diagram $Z - \sigma$, dle formulace pro parabolou vyššího řádu, i přestože se v praxi tato metodika aproximace příliš nevyužívá.

$$\sigma = \psi Z^n \quad (4.11)$$

Jen připomeňme, že veličina Z je poměrné prodloužení v místě tvorby krčku a stanoví se podle vztahu (4.11).

$$Z = \frac{A_0 - A}{A_0} \quad (4.12)$$

Předpokládejme, že z experimentu známe velikost napětí a kontrakci v místě tvorby krčku na smluvní mezi pevnosti. Potřebujeme tedy stanovit koeficienty A a n . Dosadíme-li tedy do rovnice (4.10) za σ a Z hodnoty stanovené z experimentu, můžeme po matematické úpravě psát

$$\psi = \frac{\sigma_P}{Z_P^n} \quad (4.13)$$

Potom po dosazení rovnice (4.12) do (4.10) získáme

$$\sigma_P = \overline{\sigma_P} \left(\frac{Z}{Z_P} \right)^n \quad (4.14)$$

Rovnici (4.12) přepíšeme do tvaru

$$A = A_0(1 - Z) \quad (4.15)$$

takže po dosazení rovnice (4.14) do rovnice (4.4) a úpravě dostaneme vztah pro stanovení síly F .

$$F = \sigma_P A_0(1 - Z) \quad (4.16)$$

Pokud zde dosadíme z rovnice (4.13) za σ_P , dostaneme výraz

$$F = \frac{\overline{\sigma_P} A_0}{Z_P^n} (1 - Z) Z^n \quad (4.17)$$

který derivujeme

$$dF = \frac{\overline{\sigma_P} A_0}{Z_P^n} [nZ^{n-1} - (n+1)Z^n] \quad (4.18)$$

S uvážením rovnice (4.5) platí

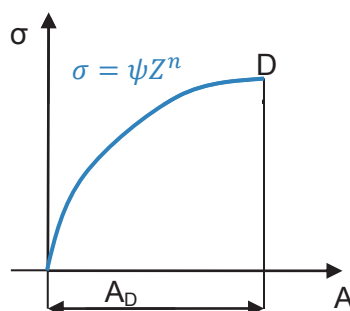
$$nZ_p^{n-1} - (n+1)Z_p^n = 0, \quad (4.19)$$

a odtud vyplývá

$$n = \frac{Z_p}{1 - Z_p}. \quad (4.20)$$

Dosazení rovnice (4.19) do rovnice (4.13) za koeficient n dostaneme rovnici pro parabolickou aproximaci pracovního diagramu, Obrázek 23.

$$\sigma_P = \bar{\sigma}_P \left(\frac{Z}{Z_p} \right)^{\frac{Z_p}{1-Z_p}} \quad (4.21)$$



Obrázek 23 – příklad parabolické aproximace skutečného pracovního diagramu

4.2 Dynamicko-plastické chování nosníku

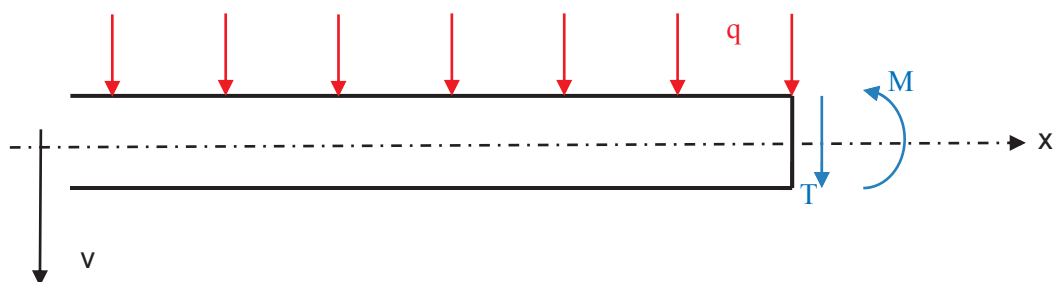
Kapitola 7 *Analytický výpočet* na str. 58 obsahuje analytické řešení v pružné i plastické oblasti. Odvození pro odezvu na dynamické zatížení provedeme pro prostě podepřený nosník spojitě zatížený, dle Obrázku 24, přičemž uvažujeme impulsní zatížení, jež je rovněž znázorněno na Obrázku 24.

Mějme tedy prostě podepřený nosník z perfektně plastického materiálu, pro který platí následující rovnice.

$$\frac{\delta M}{\delta x} = T \quad (4.22)$$

$$\frac{\delta T}{\delta x} = -q + m \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}, \quad (4.23)$$

kde q je zatížení na jednotku délky (spojité zatížení) a m hmotnost na jednotku délky.



Obrázek 24

Při řešení v praxi musíme vycházet z poměru dynamického impulsního zatížení p_0 a kritické velikosti statického zatížení p_c .

$$\eta = \frac{q_0}{q_c} \quad (4.24)$$

Pokud je

$$\eta > 3, \quad (4.25)$$

pak musíme při výpočtu vyházet z předpokladu uvedeného v kapitole 4.2.4 *První krok řešení odezvy*. Nejprve se však budeme věnovat řešení, kdy

$$0 \leq \eta \leq 3. \quad (4.26)$$

4.2.1 Prostě podepřený nosník, $0 \leq \eta \leq 3$

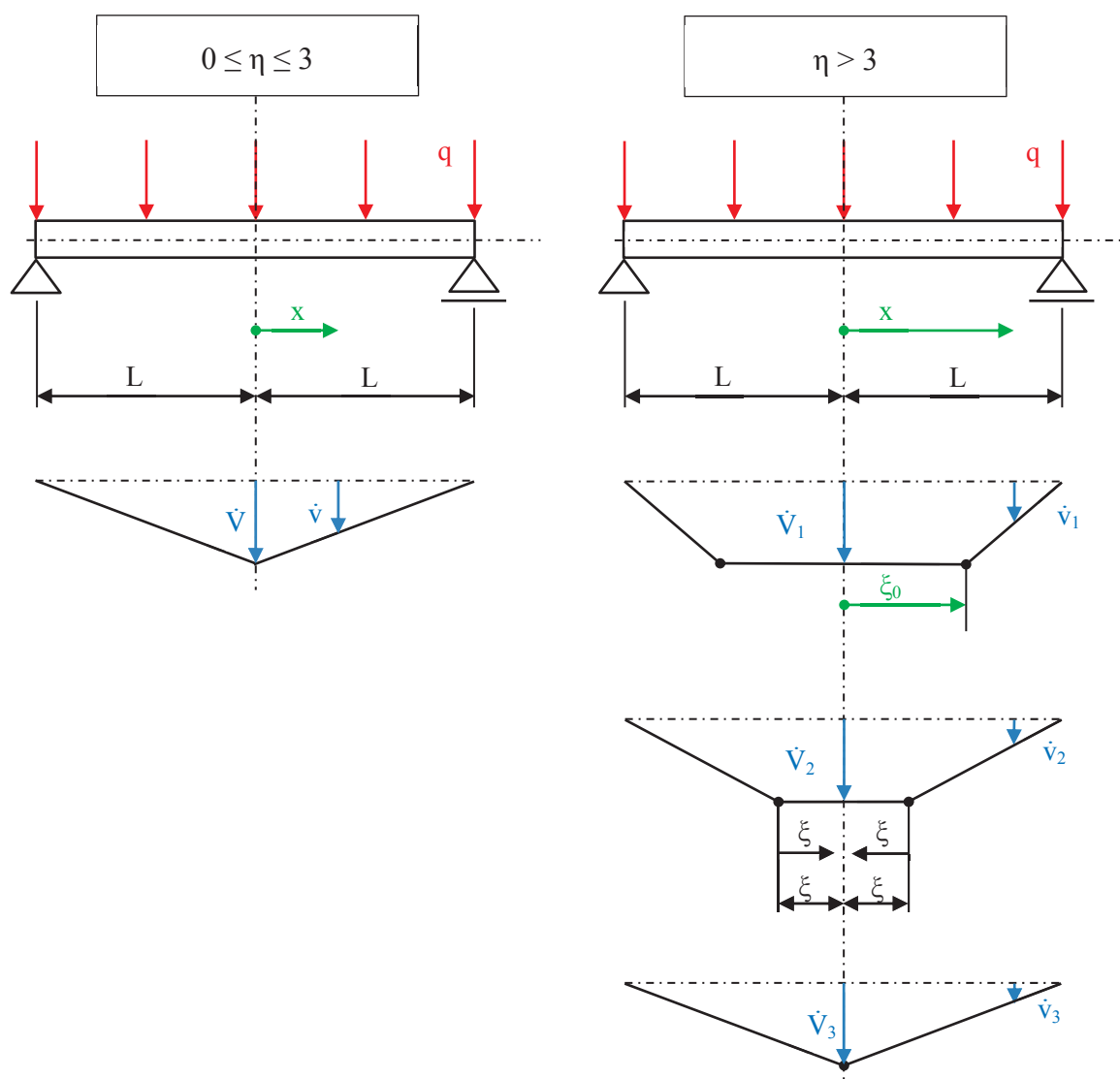
Prozkoumejme odezvu na dynamické zatížení nosníku od zatížení

$$q_0 = q, 0 \leq t \leq \tau \quad (4.27)$$

a

$$q = 0, t \geq \tau, \quad (4.28)$$

dle obrázku 25.



Obrázek 25 – prostě podepřený nosník zatížený spojitým zatížením q (na obrázku je také dobře pozorovatelný princip tvorby plastických kloubů při různých podmínkách poměru statického a kritického zatížení)

Podle [5] je

$$q_c = 2 \frac{M_o}{L^2}, \quad (4.29)$$

kde M_o není ohybový moment ale plastický moment, který se stanoví na základě tvarového součinitele f . Tvarový součinitel podle [6] můžeme stanovit z následující formulace.

$$f = \frac{Z_P}{Z_C} \quad (4.30)$$

$$Z_P = \frac{A}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \quad (4.31)$$

$$Z_c = \frac{J}{y_1} \quad (4.32)$$

Kde A je plocha průřezu,
 $\overline{y_1}, \overline{y_2}$ vzdálenost těžiště od neutrální plastické osy,
 y_1 největší vzdálenost krajního vlákna a
 J moment setrvačnosti.

Potom plastický moment bude

$$M_o = f M_y, \quad (4.33)$$

kde M_y je ohybový moment.

4.2.2 První krok řešení odezvy, $0 \leq t \leq \tau$

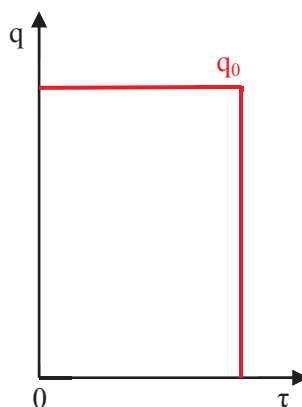
Předpokládejme, že příčná rychlost má stejný tvar, jako příčný posuv, který vznikne od kritického spojitého zatížení p_c , viz Obrázek 25.

$$\dot{v} = \dot{v} \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (4.34)$$

kde \dot{v} je příčná rychlost v polovině nosníku.

Kombinací rovnice (4.23) a rovnice (3.34) dostaneme

$$\frac{\delta^2 M}{\delta x^2} = -q + m \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}. \quad (4.35)$$



Obrázek 26 – impulsní zatížení tlakem

Další substitucí rovnic (4.23) a (4.22), integrací, aplikací okrajových a počátečních podmínek dostaneme další formulaci.

$$\frac{\delta^2 V}{\delta t^2} = 3(\eta - 1) \frac{M_o}{mL^2} \quad (4.36)$$

Dvojitou integrací rovnice (4.36) dostaneme vztah pro určení posuvu.

$$V = 3(\eta - 1) \frac{M_o t^2}{2mL^2} \quad (4.37)$$

Avšak protože

$$V(t = 0) = \dot{V} = 0 \quad (4.38)$$

je první fáze průhybu dokončená v čase $t = \tau$,

$$V = 3(\eta - 1) \frac{M_o \tau^2}{2mL^2} \quad (4.39)$$

a

$$\dot{V} = 3(\eta - 1) \frac{M_o \tau}{mL^2}. \quad (4.40)$$

4.2.3 Druhý krok řešení odezvy, $\tau \leq t \leq T$

Dle obrázku 26 nosník přestane být podroben zatížení v čase $t = \tau$, takže další průhyb nosníku se děje, aniž by byl zatížen vnějším silovým působením. Na deformaci se podílí pouze zbylá kinetická energie akumulována v plastickém kloubu, již nosník plně neabsorboval v první fázi. Jelikož jsme nyní v časové oblasti $t \geq \tau$, tak $q_o = 0$ a z rovnice (4.36) dostaneme

$$\frac{\delta^2 V}{\delta t^2} = -3 \frac{M_o}{mL^2}, \quad (4.41)$$

následnou dvojitou integrací podle času získáme rovnice

$$\dot{V} = \frac{3M_o(\eta\tau - t)}{mL^2} \quad (4.42)$$

a

$$V = \frac{3M_o(2\eta\tau t - t^2 - \eta\tau^2)}{2mL^2}. \quad (4.43)$$

4.2.4 Prostě podepřený nosník, $\eta > 3$

Na základě tvrzení v předešlé kapitole jsme schopni řešit popsany problém jen v omezeném rozsahu, viz [5] str. 69, avšak ne vždy se do tohoto omezení můžeme vejít. Proto je třeba hledat další řešení i nad mez $\eta \leq 3$. Opět tedy vyjdeme z našeho Obrázku 25 (vpravo) a rovnic (4.22) a (4.23). Jak vyplývá z Obrázku 25, tak řešení spočívá v nalezení jiného oboru rychlostí (deformací), což souvisí s jiným pohledem na tvorbu plastických kloubů. V průběhu první fáze, $0 \leq t \leq \tau$ vidíme, že plastické klouby zůstávají pevné. V druhém kroku, $\tau \leq t \leq T_1$ se plastické klouby rozšiřují směrem k rovině symetrie ($x = 0$). Poslední fáze je popsána podobným chováním, jako druhá fáze v předešlém případě, kapitola 4.2.3 *Druhý krok řešení odezvy*.

4.2.5 První krok řešení odezvy, $0 \leq t \leq \tau$

Z obrázku 25 je plynoucí, že

$$\dot{v} = \dot{V}_1, 0 \leq x \leq \xi_0, \quad (4.44)$$

tedy

$$\dot{v} = \dot{V}_1 \frac{(L-x)}{(L-\xi_0)}, \xi_0 \leq x \leq L. \quad (4.45)$$

Předpokládejme, že v plastických kloubech $x = \pm \xi_0$ je $M = M_0$. Dále můžeme psát upravenou formu vztahu (4.35).

$$\frac{\delta^2 M}{\delta x^2} = -q_0 + m \frac{\delta^2 V_1}{\delta t^2} \quad (4.46)$$

Matematickými úpravami, jež jsou obdobné, jako ty dříve popsané se nebudeme zabývat a uvedeme až výsledný vztah pro stanovení deformace V_1 .

$$V_1 = \frac{q_0 t^2}{2m} \quad (4.47)$$

4.2.6 Druhý krok řešení odezvy, $\tau \leq t \leq T_1$

V čase $t = \tau$ dojde opět k odlehčení nosníku, takže $q = 0$. V průběhu první váze deformace dosáhla kinetická energie svého maxima a odpovídá následujícímu vztahu.

$$\frac{\delta V_1}{\delta t} = \frac{q_0 t}{m} \quad (4.48)$$

Opět vyjdeme z rovnice (4.35) a obrázku 25, kde pro druhou fázi můžeme pozorovat přesunutí plastických kloubů. Ve zmíněné rovnici provedeme substituci $V_1 \rightarrow V_2$, potom

$$\frac{\delta^2 V_2}{\delta t^2} = 0 \quad (4.49)$$

takže po dvojí integraci

$$V_2 = \frac{q_0 \tau t}{m} - \frac{q_0 \tau^2}{2m}, \quad (4.50)$$

přičemž $t = \tau$. Čas T_1 který patří do intervalu druhé fáze, je dle [5] dán rovnicí

$$T_1 = \frac{q_0 L^2 \tau}{6M_o}, \quad (4.51)$$

nebo

$$T_1 = \frac{\eta \tau}{3} \quad (4.52)$$

a stanovuje dobu, kdy dojde ke sjednocení obou plastických kloubů.

4.2.7 Třetí krok řešení odezvy, $\tau \leq t \leq T$

Naposledy vyjdeme z rovnice (4.35) a provedme obdobnou substituci jako v druhé fázi.

$$\frac{\delta^2 M}{\delta x^2} = m \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{\delta^2 V_3}{\delta t^2} \quad (4.53)$$

Postupnou integrací a matematickými úpravami bychom dospěli k formulaci stanovující deformaci v poslední fázi.

$$V_3 = -\frac{3M_o t^2}{2mL} + \frac{3q_0 \tau t}{2m} - \frac{q_0 \tau^2}{2m} - \frac{q_0^2 L^2 \tau^2}{24mM_o}, \quad (4.54)$$

kde z předchozí fáze je $t = T_1$ a

$$T = \eta \tau. \quad (4.55)$$

5 Numerické metody

Numerické metody, kam spadá i metoda konečných prvků, obecně slouží k řešení technických problémů, jejichž přímé řešení by bylo velice obtížné a zdlouhavé, nebo neřešitelné. Každá numerická metoda má přesně stanovený algoritmus (postup), který v sobě skrývá mnoho matematických operací a výpočtů. Je však nutno mít na paměti, že numerické metody nám poskytují pouze přibližná řešení a vždy mají v sobě zanesenou chybu, přičemž tuto chybu neznáme a pouze ji můžeme odhadnout. V dalším textu se budeme věnovat dvěma numerickým metodám, které budou dále v praktické části využity. Jedná se o metodu konečných prvků a o metodu konečných diferencí.

5.1 Metoda konečných diferencí

Metoda konečných diferencí, též někdy nazývána jako metoda sítí slouží k řešení diferenciálních rovnic. Tato metoda spočívá v nahrazení derivací konečnými diferencemi, čímž se nám řešení převede na řešení několika algebraických rovnic definovaných pro funkční hodnoty ve vybraných uzlech. V dalším textu si vysvětlíme základní princip metody a pro hlubší studium doporučíme literaturu věnující se matematické vědě.

Mějme libovolnou a diferencovatelnou funkci $y(x)$, kde $x \in \langle a, b \rangle$. Pak můžeme pro funkční hodnoty y v bodech

$$x + h, \quad (5.1)$$

respektive

$$x - h \quad (5.2)$$

napisat Taylorovou řadu

$$\begin{aligned} (x + h) &= y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + \dots \\ (x - h) &= y(x) - y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 - \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Známe-li funkční hodnoty v bodech $x + h$ a $x - h$, tak po odečtení a úpravě formulace (5.3) dostaneme výraz pro stanovení první derivace v uzlovém bodě x .

$$y'(x) = \frac{y(x + h) - y(x - h)}{2h} + \theta(h)^2 \quad (5.4)$$

Člen $\Theta(h)^2$ obsahuje zbytky Taylorových řad, které bychom získali z rovnice (5.3) při omezení na první tři členy a vyjadřuje rychlost konvergence metody. Obdobným postupem bychom získali také formule pro vyjádření derivací vyšších řádů, avšak pak zde nastává problém v podobě fiktivních uzlů, které musíme do výpočtu zavést a podle okrajových a počátečních podmínek stanovit, což nemusí být vždy možné.

5.2 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je moderní nástroj pro řešení složitých inženýrských úloh z různých odvětví nejen strojírenského průmyslu. Vznik metody konečných prvků se datuje k čtyřicátým letům 20. století, přičemž předpoklad využití této numerické metody byl v oblasti rámových konstrukcí. Jak se vyvíjela počítačová technika, dostávala i metoda konečných prvků nový rozměr a dnes se již dá považovat za běžnou součást života každého „strojaře“. Metodu konečných prvků můžeme rozdělit podle několika kritérií. Rozdělme si ji nyní podle toho, jak je implementována v MKP softwarech, tedy na implicitní (nepřímou) a explicitní (přímou) metodu. V současné době je ve většině MKP řešičích implementován implicitní algoritmus, avšak s rostoucím výkonem počítačové techniky výrobci přecházejí právě na explicitní řešič, který je ve výsledku pro koncové uživatele hlavně z ekonomického hlediska zajímavější.

5.2.1 Implicitní metody

Implicitní metody jsou metody vhodné k řešení pomalých případně středně rychlých nelineárních dynamických úloh. Při implicitních metodách je využíváno Newmarkova schématu integrace, dle toho musí řešení odpovídat pohybovou rovnici (5.5).

$$\mathbf{M}\mathbf{a}'_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}'_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}'_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext}, \quad (5.5)$$

kde	M	je matice hmot,
	C	matice tlumení,
	K	matice tuhosti,
	\mathbf{F}_{n+1}^{ext}	vektor vnějšího zatížení v kroku n+1,
	\mathbf{a}'_{n+1}	odhad zrychlení v kroku n+1,
	\mathbf{v}'_{n+1}	odhad rychlosti v kroku n+1,

d'_{n+1} odhad posunutí v kroku $n+1$.

Odhady rychlostí i posunutí můžeme získat z následujících formulací:

$$v'_{n+1} = v_n + (1 - \gamma)a_n\Delta t + \gamma a'_{n+1}\Delta t \quad (5.6)$$

$$d'_{n+1} = d_n + v_n\Delta t + \frac{(1 - 2\beta)a_n\Delta t^2}{2} + \beta a'_{n+1}\Delta t^2. \quad (5.7)$$

Případně

$$v'_{n+1} = v_n^* + \gamma a'_{n+1}\Delta t \quad (5.8)$$

$$d'_{n+1} = d_n^* + \beta a'_{n+1}\Delta t^2, \quad (5.9)$$

kde Δt je časový krok a
 β a γ konstanta.

Veličiny d_n^* a v_n^* jsou předem známé (spočítané) veličiny, takže dosazením rovnice (5.6) a (5.7), respektive rovnice (5.8) a (5.9) do formulace pohybové rovnice (5.5) získáme kupříkladu následující vztah:

$$[M + C\gamma\Delta t + K\beta\Delta t^2]a'_{n+1} = F_{n+1}^{ext} - Cv_n^* - Kd_n^*. \quad (5.10)$$

Přechozí rovnici (5.10) můžeme potom psát zjednodušeně v této podobě:

$$M^* a'_{n+1} = F_{n+1}^{residual}. \quad (5.11)$$

Odtud pak můžeme s úspěchem vyjádřit odhad zrychlení v kroku $n+1$.

$$a'_{n+1} = M^{*-1}F_{n+1}^{residual} \quad (5.12)$$

U implicitních metod rozhoduje o složitosti řešení konvergence iterační procedury. Výpočet je poměrně složitý a díky velkému množství výpočtů také zdlouhavý, což je cena za dobrou stabilitu výpočtu. Volba časového kroku stabilitu neovlivňuje, avšak při velkém časovém kroku může vést k nereálným výsledkům.

5.2.2 Explicitní metody

Využití explicitních algoritmů je vhodné např. při řešení materiálových či velkých geometrických nelinearit (kontakty, tření, atd.), rychlých dynamických dějů (např. crush testy, rázy apod.).

Explicitní algoritmy MKP vycházejí z druhého Newtonova zákona přepsaného do maticové formy v daném časovém okamžiku. Rovnováha pak nastane, je-li splněna následující podmínka, rovnice rovnováhy.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_n + \mathbf{C}\mathbf{v}_n + \mathbf{K}\mathbf{d}_n = \mathbf{F}_n^{ext} \quad (5.13)$$

Po úpravě rovnice (5.13) pak můžeme psát novou formulaci v této podobě:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_n^{residual}, \quad (5.14)$$

kde

$$\mathbf{F}_n^{residual} = \mathbf{F}_n^{ext} - \mathbf{F}_n^{int} \quad (5.15)$$

a

$$\mathbf{F}_n^{int} = \mathbf{C}\mathbf{v}_n + \mathbf{K}\mathbf{d}_n. \quad (5.16)$$

Kde \mathbf{F}_n^{ext} vektor vnějšího zatížení,
 \mathbf{F}_n^{int} vektor vnitřního zatížení (např. hourglassingovy síly, objemové síly apod.),
 \mathbf{M} matice hmot,
 \mathbf{a}_n zrychlení.

Bude-li matice hmot diagonální, získáme triviální řešení, při němž musí pro libovolný stupeň volnosti platit následující rovnice (5.17).

$$\mathbf{a}_{ni} = \frac{\mathbf{F}_{ni}^{residual}}{\mathbf{M}_i} \quad (5.17)$$

Rychlosti a posuvy získáme z těchto formulí.

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \frac{\mathbf{a}_n \left(\Delta t_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t_{n-\frac{1}{2}} \right)}{2} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{n+1/2} \Delta t_{n+1/2} \quad (5.19)$$

Na úkor jednoduchosti jsou explicitní metody hůře podmíněné, což závisí na volbě časového kroku. Kritický časový krok stanovíme z rychlosti průchodu napěťové vlny elementem [rovnice (3.16)], přitom časový krok musí být kratší, než je čas pro průchod napěťové vlny nejmenším prvkem. Z toho také plyne fakt zmíněný i v další kapitole, že je třeba vyhnout se příliš jemné síti, protože ta by explicitní výpočet prodlužovala. Oproti implicitním metodám jsou časové kroky menší v řádech 10^{-2} až 10^{-3} .

$$\Delta t = \frac{SL_{emin}}{c}, \quad (5.20)$$

kde	Δt	je časový krok,
	S	měřítko časového kroku (<1),
	L_{emin}	nejmenší rozměr elementu sítě,
	c	rychlost zvuku v elementu, viz rovnice (3.16).

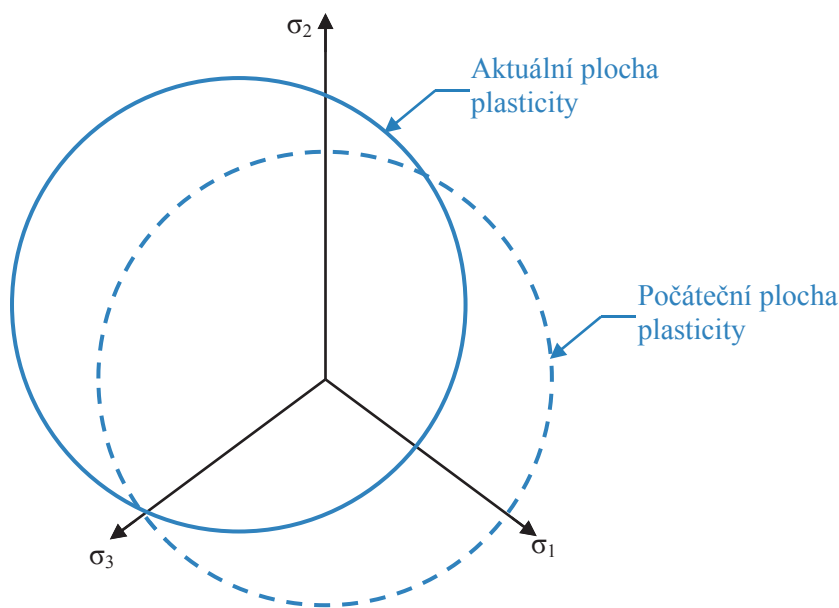
Na okraj se ještě zmiňme o hourglassingu, který jsme zmínili v souvislosti s rovnicí (5.16). Hourglassing je nepříznivý jev, který při explicitních řešeních nastává, a souvisí s tím, že napětí a posuvy se vyhodnocují pouze v jednom bodě (Gaussův integrační bod). Hourglassing způsobuje nestabilitu algoritmu a je to mód s nulovou energií. Jeho hodnota by podle [ansys help] neměla přesáhnout 10 % celkové vnitřní energie.

6 Materiálové modely v MKP řešičích

Relevantnost výsledků každého konečnoprvkového výpočtu také záleží na vhodné volbě materiálového modelu. V následujících odstavcích se budeme věnovat několika modelům, které jsou integrovány v explicitním řešiči SOL 700 a které by mohly být použity při numerickém výpočtu hrázového objektu.

6.1 Elastoplastický materiálový model

U pružnoplastického materiálu modelu rozlišujeme tři pravidla zpevnění. Prvním z nich je pravidlo kinematického zpevnění. Kinematické zpevnění se stanovuje na základě koeficientu β ($\beta = 0$ nebo $\beta = 1$). Elastoplastický materiálový model s kinematickým zpevněním formulovali Krieg a Key v roce 1976.

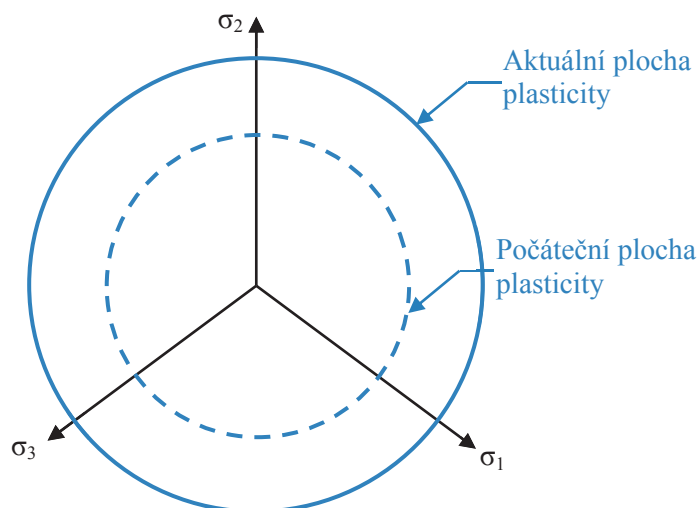


Obrázek 27 – změna polohy plochy plasticity při kinematickém zpevnění

Dalším pravidlem je izotropní zpevnění. Při izotropním zpevnění materiál zůstává i nadále izotropním a vykazuje deformační zpevnění, přičemž střed mezní plochy zůstává ve stejné poloze, ale mezní plocha se zvětšuje, protože poloměr je funkcí plastické deformace. Oproti tomu při kinematickém zpevnění zůstává velikost mezní plochy zachována, ale posouvá se plocha plasticity, Obrázek 27, a na Obrázku 28 je znázorněn princip transformace mezní plochy při izotropním zpevnění. Elastoplastický model pak je popsán následující formulí.

$$\sigma_y = \sigma_0 + \beta E_Z \epsilon_{eff}^p, \quad (6.1)$$

kde σ_0 je počáteční mez kluzu,
 E_Z modul plastického zpevnění,
 ϵ_{eff}^p efektivní plastická deformace.



Obrázek 28 - zvětšení plochy plasticity při izotropním zpevnění

6.2 Johnson - Cook plastický materiálový model

Materiálový model Johnson – Cook se řídí rovnicí

$$\sigma_y = (A + B \overline{\epsilon}_p^n) \cdot (1 + C \ln \dot{\epsilon}^*) \cdot (1 - T^{*m}), \quad (6.2)$$

kde A, B, C, m a n jsou konstanty a
 $\dot{\epsilon}^*$ efektivní plastická deformace,
 T^{*m} homogenická teplota.

Jak je vidět z rovnice (6.2), je Johnson – Cook materiálový model závislý na rychlosti deformace, ale také může záviset na teplotě. Je vhodný pro problémy zabývající se vysokými rychlostmi, velkými deformacemi. Obecně poskytuje dobré výsledky například při simulacích obrábění, kde při plastické deformaci dochází ke značné změně teploty a díky tomu může dojít k měknutí materiálu.

6.3 Částečně lineárně izotropní model

Tento materiálový model je podobný elastoplastickému modelu s kinematickým zpevněním s rozdílem, že se zde počítá pouze s izotropním zpevněním a chování modelu je stanoveno vztahem (6.3).

$$\sigma_y = \beta [\sigma_0 + f_h(\epsilon_{eff}^p)], \quad (6.3)$$

kde je funkce zpevnění.

$$f_h(\epsilon_{eff}^p) = E_Z(\epsilon_{eff}^p). \quad (6.4)$$

Částečně lineárně izotropní model je využíván ve třech modifikacích. Nejčastěji používaný je Cowper-Symonds model. Ten je dán formulací (6.5). Materiálový model Cowper-Symonds umožňuje definovat mez kluzu pro izotropní zpevnění, která je funkcí rychlosti deformace.

$$\sigma_y(\epsilon_{eff}^p, \epsilon'_{eff}^p) = \sigma_y(\epsilon_{eff}^p) \left[1 + \left(\frac{\epsilon'_{eff}^p}{C} \right)^{1/p} \right], \quad (6.5)$$

kde p a C jsou Cowper-Symonds koeficienty.

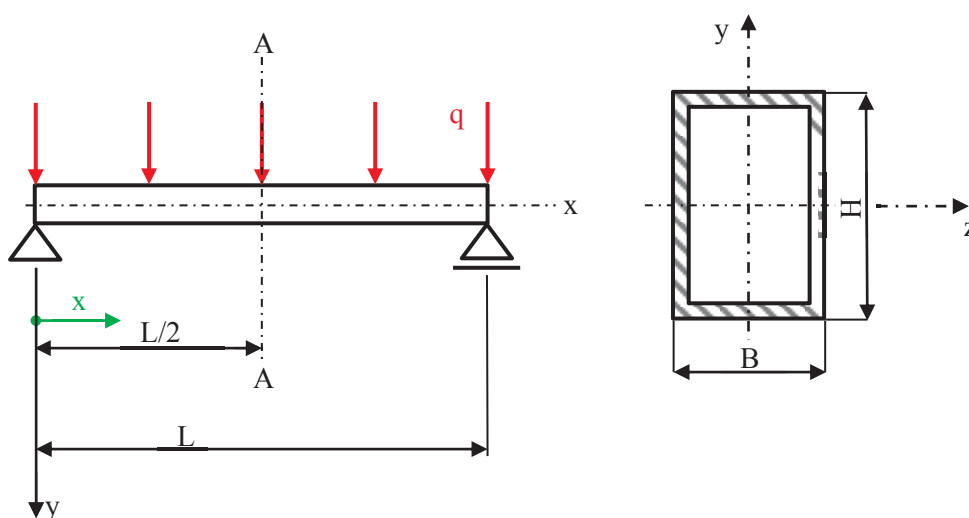
7 Analytický výpočet

Výpočet je aplikován pouze na nejvíce namáhanou část hrázového objektu, za kterou považujeme svislý nosník, Obrázek 29, a výpočet je proveden jak v oblasti pružné, tak v oblasti plastické.

Zadané veličiny jsou sepsány v Tabulce 1 a graf, který znázorňuje průběh rázového zatížení, je vyobrazen na Obrázku 30 převzatého z experimentu.

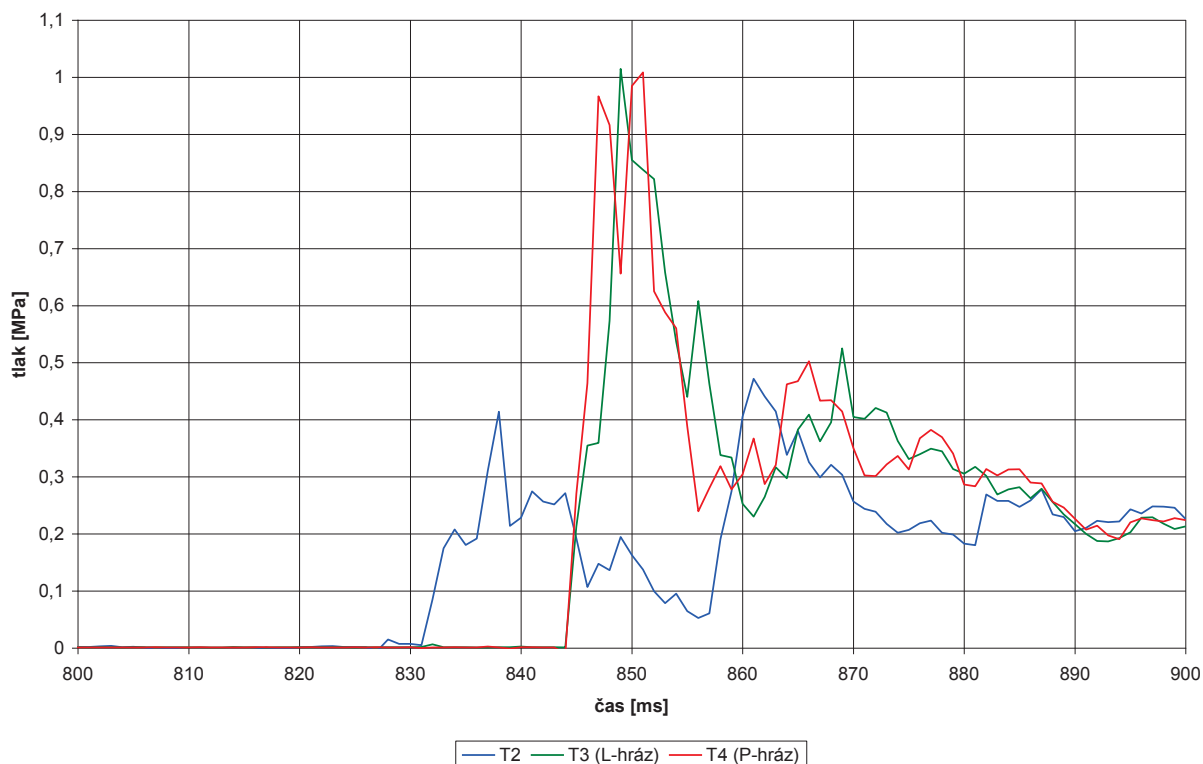
Tabulka 1 – rozměry a mechanické vlastnosti materiálu nosníku

Šířka B [mm]	Výška H [mm]	Délka L [mm]	Tloušťka t [mm]	Hostota ρ [t·mm ⁻³]	Modul pružnosti E [MPa]
150	200	3 080	16	$7,85 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^5$



Obrázek 29

PDIO 7 - zkouška 1MPa



Obrázek 30 – tlakové zatížení hrázového objektu (převzato z měření)

7.1 Výpočet v pružné oblasti

Pro výpočet pružné oblasti bude využito numerické metody konečných diferencí. Pro výpočet a odvození využijeme úplné diferenciální rovnice průhybové čáry, která je 4. řádu, viz rovnice (7.1). Tato rovnice je ještě doplněná o dynamický účinek, který je zastoupen druhým členem na levé straně rovnice.

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + \rho A \frac{\delta^2 y}{dt^2} = q \quad (7.1)$$

Člen na pravé straně rovnice (7.1) vyjadřuje zatížení. Zadané zatížení je tlakové v MPa, avšak pro naše účely potřebujeme mít zatížení udané na jednotku délky. Takže prvním krokem bude přepočítání tlakového zatížení p na spojitě zatížení q , které je také znázorněno i na obrázku 29. Z Obrázku 30 s časovým krokem $\Delta t = 2 \text{ ms}$ odečteme odpovídající zatížení, viz Tabulka 11 v příloze.

Tlak je definován jako síla vztažena na plochu, tedy

$$p = \frac{F}{A}. \quad (7.2)$$

Spojité zatížení se určí z

$$q = \frac{F}{L}. \quad (7.3)$$

Matematickými úpravami a kombinací rovnic (7.2) a (7.3) dostaneme vztah pro stanovení spojitěho zatížení ve formě

$$q = p \cdot B. \quad (7.4)$$

Mějme tedy nosník na koncích prostě podepřený, Obrázek 29, pro který máme zadaná data, viz Tabulka 1 a 2. Rovnici (7.1) dle [7], str. 538 budeme aproximovat touto formulací

$$y^{iv} = \frac{[y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)]}{h^4}, \quad (7.5)$$

kteřou bychom odvodili z rozvoje Taylorovy řady pro formuli (5.1) a (5.2). Nyní si zvolíme krok pro souřadnici x , časový krok Δt a provedeme rozdělení nosníku podle zvoleného kroku Δx na jednotlivé části, v nichž stanovíme průhyb v jednotlivých časových intervalech podle časového kroku. Délkový krok a časový inkrement volíme $\Delta x = 770 \text{ mm}$ a $\Delta t = 2 \text{ ms}$. Volbou délkového kroku jsme nosníku pomyslně přidělili 5 uzlů, avšak dle rovnice (7.5) jich při aproximaci diferenciální rovnice 4. řádu potřebujeme celkem 7, a proto zavádíme ještě dva fiktivní body, které na nosníku neleží, Obrázek 31. Dále tedy můžeme napsat

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{\Delta x^4} y_{i-2} + \left(-\frac{4EJ}{\Delta x^4} + \frac{\rho A}{\Delta t^2} \right) y_{i-1} + \left(\frac{6EJ}{\Delta x^4} - \frac{2\rho A}{\Delta t^2} \right) y_i + \\ + \left(-\frac{4EJ}{\Delta x^4} + \frac{\rho A}{\Delta t^2} \right) y_{i+1} + \frac{EJ}{\Delta x^4} y_{i+2} = q(t), \end{aligned} \quad (7.6)$$

což je naše aproximovaná diferenciální rovnice (7.1). Abychom aproximovanou formulaci zkrátili, zavedme následující substituci:

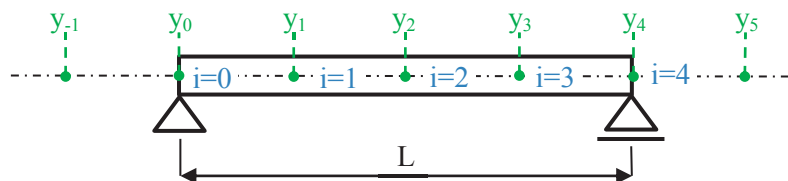
$$a y_{i-2} + b y_{i-1} + c y_i + b y_{i+1} + a y_{i+2} = q(t). \quad (7.7)$$

Potom pro jednotlivé uzly můžeme napsat příslušné rovnice, které nám ve výsledku dají řešení soustavy algebraických rovnic, které můžeme psát v následujícím maticovém zápise:

$$\frac{1}{\Delta x^4} \mathbf{k} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{q}(t), \quad (7.8)$$

kde \mathbf{k} je matice konstant příslušných posunutí,

y sloupcová matice posunutí a
q(t) sloupcová matice vnějšího zatížení.



Obrázek 31

Rovnice pro jednotlivé uzly budou následující:

Uzel 0:

$$ay_{-2} + by_0 + cy_1 + by_2 + ay_3 = q(t), \quad (7.9)$$

Uzel 1:

$$ay_{-1} + by_0 + cy_1 + by_2 + ay_2 = q(t), \quad (7.10)$$

Uzel 2:

$$ay_0 + by_1 + cy_2 + by_3 + ay_4 = q(t), \quad (7.11)$$

Uzel 3:

$$ay_1 + by_2 + cy_3 + by_4 + ay_5 = q(t), \quad (7.12)$$

Uzel 4:

$$ay_2 + by_3 + cy_4 + by_5 + ay_6 = q(t). \quad (7.13)$$

Než budeme pokračovat ve výpočtu, stanovíme kvadratický moment průřezu a velikost plochy, na kterou působí spojitě zatížení q . Tyto konstanty dosadíme do předchozích vztahů (7.9) až (7.13), resp. do formulace (7.6). Velikost plochy tedy vypočteme z

$$A = BL = 150 \cdot 3\,080 = \underline{462 \cdot 10^3 \text{ mm}^2} \quad (7.14)$$

a kvadratický moment průřezu

$$\begin{aligned} J &= \frac{BH^3}{12} - \frac{(B - 2t)(H - 2t)^3}{12} = \\ &= \frac{150 \cdot 200^3}{12} - \frac{(150 - 2 \cdot 16)(200 - 2 \cdot 16)^3}{12} = \\ &= \underline{53\,373\,952 \text{ mm}^4}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Pokud

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{EJ}{\Delta x^4}, \\
 b &= -\frac{4EJ}{\Delta x^4} + \frac{\rho A}{\Delta t^2}, \\
 c &= \frac{6EJ}{\Delta x^4} - \frac{2\rho A}{\Delta t^2},
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

pak dosazením do zápisu (7.8) dostaneme

$$\begin{bmatrix} (-a+c) & b & a \\ b & c & b \\ a & b & (c-a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{q}(t). \tag{7.17}$$

Formulaci (7.17) nyní zleva vynásobíme matici \mathbf{k} a dopočítáme deformace v jednotlivých uzlech.

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a+c) & b & a \\ b & c & b \\ a & b & (c-a) \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{q}(t) \tag{7.18}$$

Pro výpočet posunutí metodou konečných diferencí byl využit matematický software MATLAB, viz příloha 12.2 *Procedura analytického řešení bez vlivu plasticity*. Tímto výpočtem jsme tedy stanovili deformaci nosníku, bez uvážení vlivu plasticity a deformace vyšla přibližně 22,2 mm.

Vzhledem k hrubé aproximaci byly ještě provedeny další dva výpočty s menším délkovým inkrementem. Další dvě aproximace tedy byly provedeny pro $\Delta x = 385 \text{ mm}$ a $\Delta x = 192,5 \text{ mm}$. V Tabulce 12 jsou uvedeny posuvy v jednotlivých časových krocích pro každý uzel pro nejjemnější dělení ($\Delta x = 192,5 \text{ mm}$). Jelikož je nosník zatížen symetricky, tak i deformace nosníku budou symetrické. V Tabulce 12 jsou tedy uvedeny pouze průhyby do poloviny nosníku $L = 1\,540 \text{ mm}$.

V tabulce 4 jsou uvedeny deformace v polovině nosníku, tedy v místě, kde dosahují maximálních hodnot. K porovnání je zde také uveden výsledek analytického řešení, kde se nebere v úvahu čas působení zatížení, ale pouze maximální statická hodnota tohoto zatížení. Rovnice (7.19) převzata z [16] str. 142 je tedy statickým řešením průhybu nosníku.

Tabulka 2

Průhyb nosníku pro $\Delta x = 770$ mm	22,2 mm
Průhyb nosníku pro $\Delta x = 385$ mm	21,4 mm
Průhyb nosníku pro $\Delta x = 192,5$ mm	21,2 mm
Statické řešení průhybu nosníku	15,7 mm
Dynamické řešení průhybu nosníku	31,4 mm

$$y_{max} = \frac{5qL^4}{384EJ} = \frac{5 \cdot 150 \cdot 3080^4}{384 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 53\,373\,952} = \underline{15,7 \text{ mm}} \quad (7.19)$$

Ještě doplníme, že podle [23] můžeme stanovit průhyb při ráze jako dvojnásobek statického průhybu. Potom by tedy průhyb při ráze byl $y_d = y_{max} \cdot 2 = 15,7 \cdot 2 = \underline{31,4 \text{ mm}}$.

7.2 Výpočet se zahrnutím plasticity

Při výpočtu průhybu budeme vycházet z kapitoly 4.2 *Dynamicko-plastické chování nosníku* a částečně také z předešlé kapitoly. Jako první si stanovíme hodnotu tvarového součinitele. Vyjdeme z obrázku 32, ze kterého je zřejmé, že neutrální osa plasticity nám rozdělí průřez na dvě symetrické poloviny. Velikost jednotlivých ploch A_1 a A_2 stanovíme z následujících dvou vztahů:

$$A_1 = (B - 2t)t = (150 - 2 \cdot 16)16 = \underline{1\,888 \text{ mm}^2} \quad (7.20)$$

$$A_2 = \frac{H}{2}t = \frac{200}{2}16 = \underline{1\,600 \text{ mm}^2} \quad (7.21)$$

Potom celková plocha bude

$$A = A_1 + 2A_2 = 1\,888 + 2 \cdot 1\,600 = \underline{5\,088 \text{ mm}^2}. \quad (7.22)$$

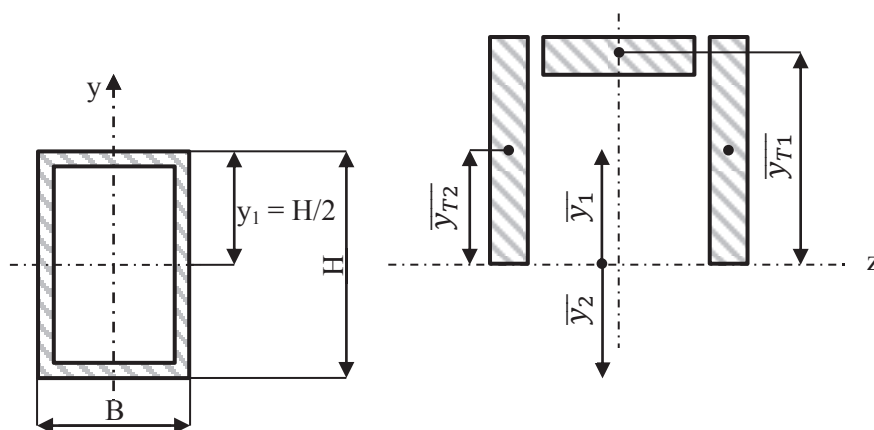
Zajímají nás pouze y -ové souřadnice těžiště, takže podle Obrázku 31 je

$$\overline{y_{T1}} = \left[- , \frac{H - t}{2} \right] = [- , 92] \quad (7.23)$$

$$\overline{y_{T2}} = \left[- , \frac{H}{4} \right] = [- , 50] , \quad (7.24)$$

potom

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{y}_{T1}A_1 + 2\bar{y}_{T2}A_2}{A} = \frac{92 \cdot 1\,888 + 2 \cdot 50 \cdot 1\,600}{5\,088} = \underline{65,584\text{ mm}}. \quad (7.25)$$



Obrázek 32

Dosazením rovnice (7.22), (7.25) do (4.31), pak úpravou dostaneme rovnici (7.26) a dosazením rovnice (7.16) do rovnice (4.32) dostaneme (7.27).

$$Z_P = A\bar{y}_1 = 5\,088 \cdot 65,584 = \underline{333\,696\text{ mm}^3} \quad (7.26)$$

$$Z_C = \frac{J}{y_1} = \frac{2 \cdot 53\,373\,952}{200} = \underline{5,337 \cdot 10^5\text{ mm}^3} \quad (7.27)$$

Dále dosazením rovnice (7.26) a (7.27) do vztahu (4.30) získáme hodnotu pro tvarový součinitel f .

$$f = \frac{Z_P}{Z_C} = \frac{333\,696}{5,337 \cdot 10^5} = \underline{0,625} \quad (7.28)$$

Ohybový moment nosníku určíme z rovnice (7.29).

$$M_y = \frac{2J\sigma_Y}{H} = \frac{2 \cdot 53\,373\,952 \cdot 355}{200} = \underline{1,895 \cdot 10^8\text{ Nmm}} \quad (7.29)$$

Takže konečně plastický moment bude

$$M_o = fM_y = 0,625 \cdot 1,895 \cdot 10^8 = \underline{118,462 \cdot 10^6\text{ Nmm}}. \quad (7.30)$$

Nyní potřebujeme zjistit, ze které teorie budeme vycházet. K tomu potřebujeme stanovit kritickou hodnotu spojitého zatížení q_c podle rovnice (4.29).

$$q_c = 2 \frac{M_o}{l^2} = 2 \frac{118,462 \cdot 10^6}{1\,540^2} = \underline{99,9\text{ Nmm}^{-1}} \quad (7.31)$$

Poměr

$$\eta = \frac{q_0}{q_c} = \frac{150}{99,9} = \underline{1,501}, \quad (7.32)$$

takže výpočet průhybu nosníku bude vycházet z kapitoly 4.2.1 *Prostě podepřený nosník*. Provedme tedy postupně dosazení do rovnic (4.39), (4.40), (4.42) a (4.43).

$$V_1 = 3(\eta - 1) \frac{M_o \tau^2}{2ml^2} = 3(1,501 - 1) \frac{118,462 \cdot 10^6 \cdot 10^2}{2 \cdot 7,701 \cdot 10^{-5} \cdot 1\,540^2} = \underline{48,792 \text{ mm}} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 3(\eta - 1) \frac{M_o \tau}{ml^2} = 3(1,501 - 1) \frac{118,462 \cdot 10^6 \cdot 10}{2 \cdot 7,701 \cdot 10^{-5} \cdot 1\,540^2} = \\ &= \underline{9,758 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

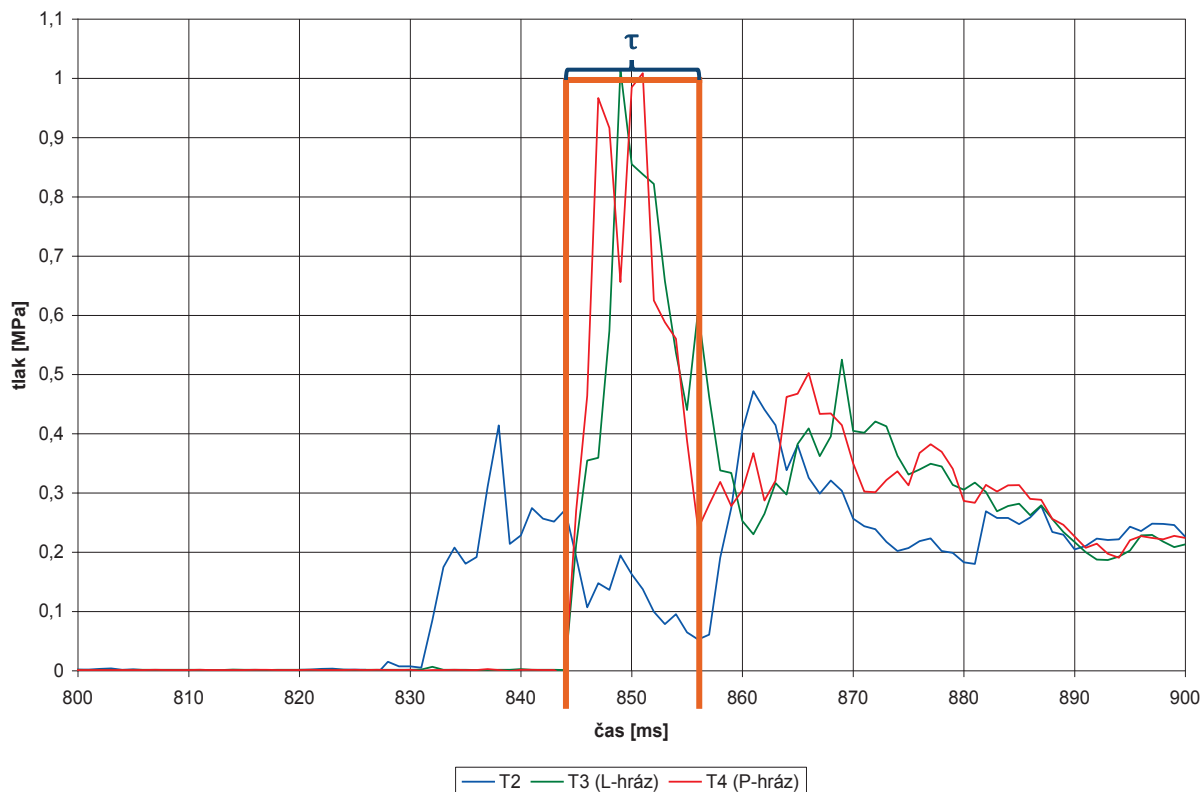
kde τ je doba průběhu rázu v první fázi podle Obrázku 33, $\tau = 10 \text{ ms}$. V druhém kroku bude čas dán vztahem

$$t = \eta \tau = 1,501 \cdot 10 = \underline{15,01 \text{ s}}. \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{3M_o(2\eta\tau t - t^2 - \eta\tau^2)}{2ml^2} = \\ &= \frac{3 \cdot 118,462 \cdot 10^6 (2 \cdot 1,501 \cdot 10 \cdot 15,01 - 15,01^2 - 1,501 \cdot 10^2)}{2 \cdot 7,701 \cdot 10^{-5} \cdot 1\,540^2} = \\ &= \underline{\underline{73,261 \text{ mm}}} \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{3M_o(\eta\tau - t)}{ml^2} = \frac{3 \cdot 118,462 \cdot 10^6 (1,501 \cdot 10 - 15,01 \cdot 10)}{7,701 \cdot 10^{-5} \cdot 1\,540^2} \\ &= \underline{0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}} \end{aligned} \quad (7.37)$$

PDIO 7 - zkouška 1MPa

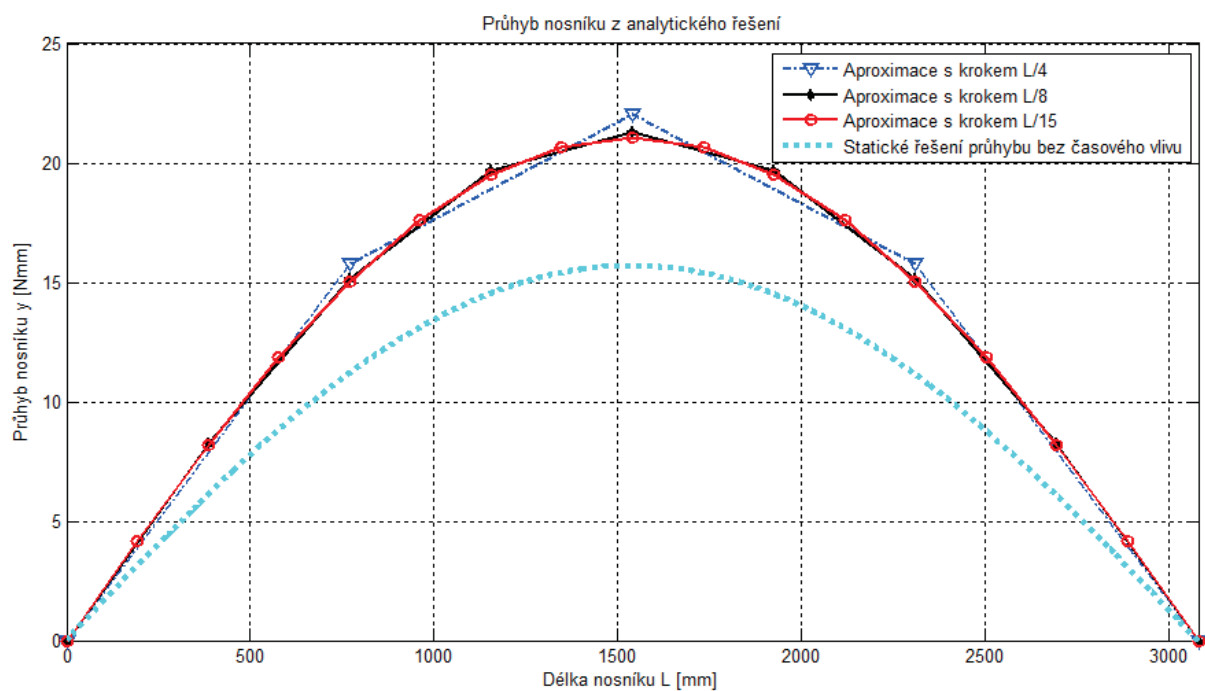


Obrázek 33

7.3 Shrnutí dosažených výsledků analytického řešení

Z provedeného analytického řešení vyplývá, že na výpočet v elastické oblasti nemůžeme při konečném návrhu brát zřetel, protože výsledky zahrnují velkou chybu, která je dána několika zjednodušeními i zavedenými předpoklady. Výsledek deformace v elastické oblasti můžeme považovat pouze za jakýsi odhad, resp. za minimální deformaci, která se v případě výbuchu na nosníku projeví. Naopak v případě, pokud uvažujeme, že dojde ke splastizování nosníku a provedeme výpočet s ohledem na tuto skutečnost, dostaneme výsledek, který by se měl blížit průhybu z experimentálního měření, případně z MKP výpočtu. Nutno podotknout, že ačkoliv mluvíme o analytickém řešení průhybu bez zahrnutí plasticity, tak máme na mysli řešení analytických vztahů numerickou metodou konečných diferencí.

V tabulce 3 jsou shrnuty výsledky z obou řešení problému. Pro lepší představu ještě uvádíme Obrázek 34, kde jsou vykresleny jednotlivé křivky průhybu nosníku pro jednotlivá řešení v elastické oblasti.



Obrázek 34

Tabulka 3

1	Průhyb nosníku v el. oblasti pro $\Delta x = 770$ mm	22,2 mm
2	Průhyb nosníku v el. oblasti pro $\Delta x = 385$ mm	21,4 mm
3	Průhyb nosníku v el. oblasti pro $\Delta x = 192,5$ mm	21,2 mm
4	Statické řešení průhybu nosníku v el. oblasti	15,7 mm
5	Průhyb nosníku se zahrnutou plasticitou	73,3 mm
6	Dynamické řešení průhybu nosníku	31,4 mm

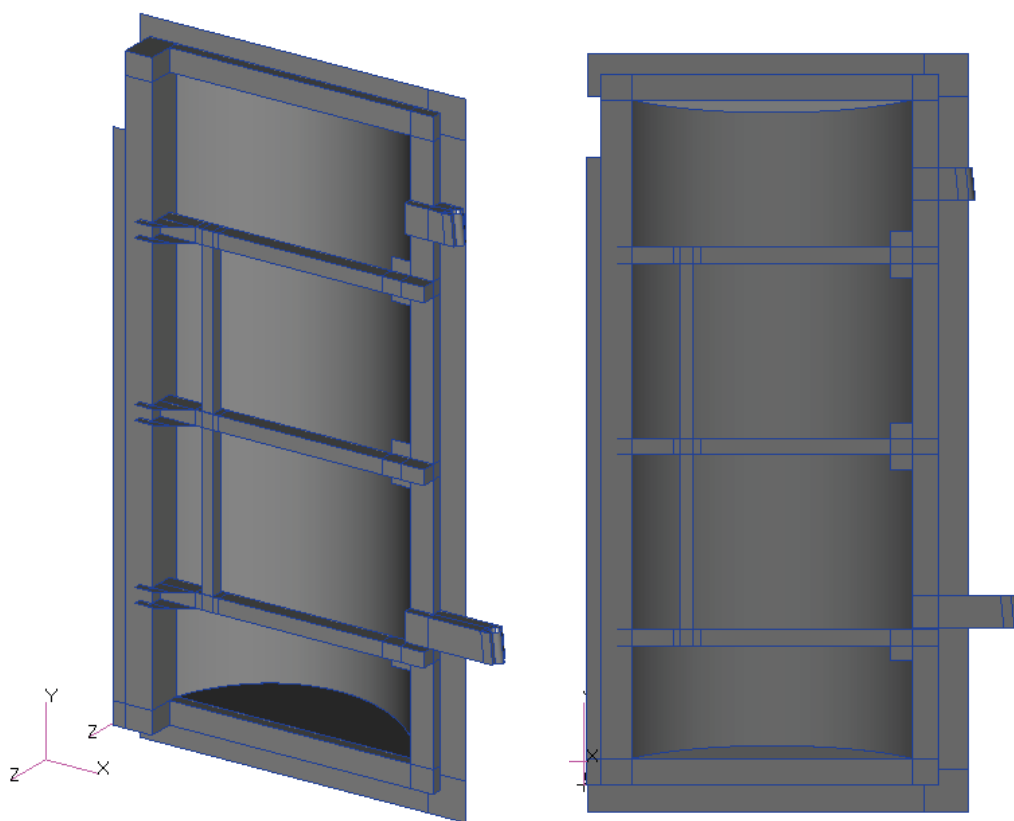
8 Numerický výpočet metodou konečných prvků

Analýza metodou konečných prvků hrázových dveří byla provedena v softwaru MSC Nastran pomocí řešiče SOL 700, který vychází z explicitního algoritmu.

8.1 Geometrický model

Geometrický model hrázových dveří byl připraven v softwaru MSC Patran. Vzhledem ke konstrukci hrázových dveří byl geometrický model vytvořen pouze z 2D prvků (skořepin), které byly vhodným způsobem rozděleny a tím připraveny k následné tvorbě konečnoprvkového modelu.

Vzhledem k symetrii objektu a zatížení se model skládá pouze z jednoho křídla. Předpokládáme, že na druhém křídle bychom dostali symetrické výsledky jak průhybu, tak napětí. Vytvořený geometrický model je vidět na Obrázku 35.

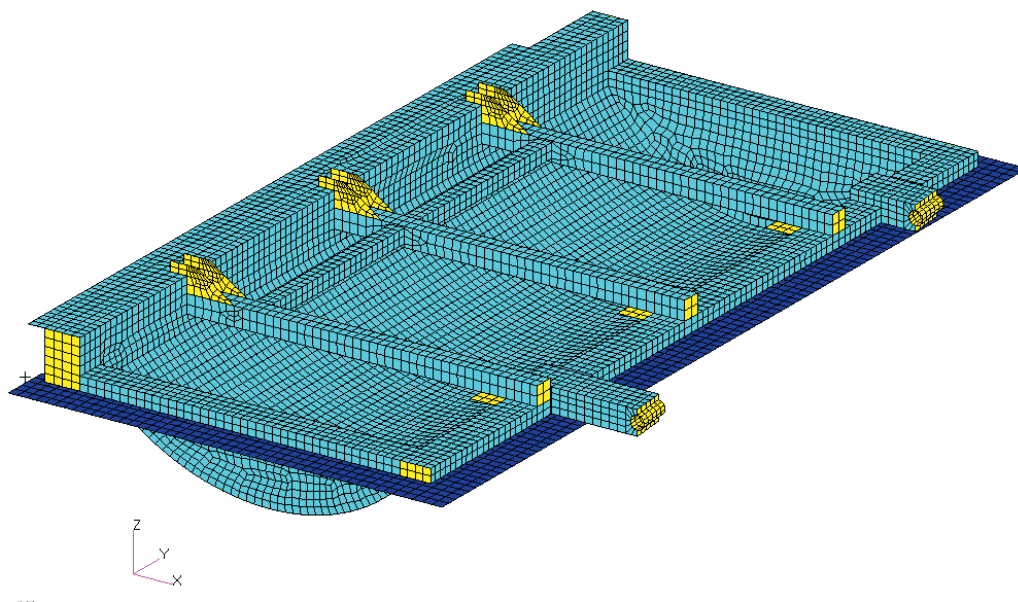


Obrázek 35 – Geometrický model objektu

8.2 Materiálové vlastnosti

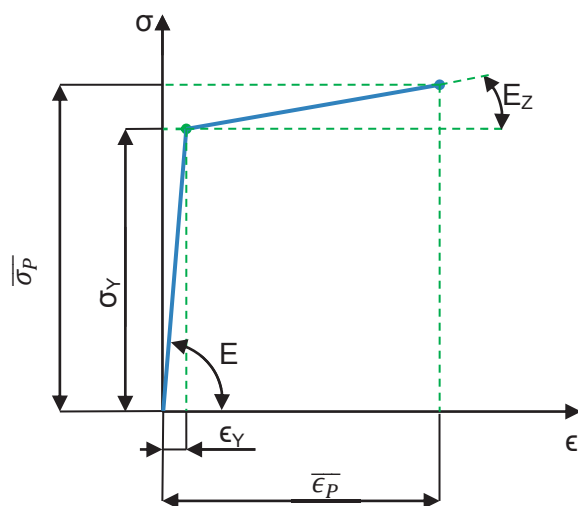
Pro výrobu hrázových dveří byly použity 3 různé oceli. Jelikož se jedná o svařovanou konstrukci, všechny oceli musí mít zaručenou svařitelnost. Materiály, které byly pro výrobu

hrázových dveří použity, jsou uvedeny v Tabulce 4. Obrázek 36 znázorňuje přiřazení materiálů k jednotlivým částem našeho modelu. Jednotlivé barvy modelu odpovídají přiřazenému materiálu a souhlasí s barevným rozlišením v Tabulce 4. Na Obrázku 36 je ještě tmavě modrá barva, jež odpovídá materiál rámu, který je v MSC Patranu označen jako *MATD020* a má vlastnosti absolutně tuhého tělesa. Žlutou barvou jsou pak vyznačeny oceli 11 373 a 11 375, které jak je vidět v tabulce mají totožné materiálové vlastnosti.



Obrázek 36 – přiřazení materiálu jednotlivým prvkům dveří

Při nastavení materiálových vlastností pro MKP výpočet nemůžeme vycházet ze smluvního diagramu tahové zkoušky, ale je třeba provést jeho aproximaci. Několik způsobů aproximace pracovního diagramu bylo popsáno v kapitole *4.1 Pracovní diagram a jeho aproximace*. Vyjděme nyní z aproximovaného pracovního diagramu pomocí lomené křivky t_p , viz Obrázek 37.



Obrázek 37

Tabulka 4 – přiřazení materiálu jednotlivým prvkům konstrukce (barva písma v tabulce odpovídá barevnému zobrazení na obrázku 35)

Materiál	Mez kluzu σ_Y [MPa]	Modul pružnosti E [Mpa]	Mez pevnosti v tahu σ_p [MPa]
Ocel 11 373	235	210 000	420
Ocel 11 375	235	210 000	420
Ocel 11 523	355	210 000	560

Tabulka 4 uvádí mechanické vlastnosti jednotlivých ocelí, které byly zjištěny z softwaru *Lexikon kovů*. Již jsme zmínili, že materiálové vlastnosti oceli 11 373 a 11 375 jsou totožné, takže pro ně provedeme pouze jednu aproximaci pracovního diagramu.

Materiálový model jsme zvolili pružněplastický s kinematickým zpevněním, který je v MSC Patranu označován jako *MAT3*. K jeho zadání potřebujeme kromě plastického modulu zpevnění, který určíme aproximací pracovního diagramu, ještě Cowper – Symonds koeficienty, které jsme převzali z [10] str. 349 a pro měkkou ocel jsou konstanty $C = 40,4 \text{ s}^{-1}$ a $P = 5$.

8.3 Aproximace smluvního diagramu ocelí 11 373 a 11 375

Nyní využijeme vztahu (8.1), ze kterého dostaneme úhel E_Z , díky kterému provedeme nahrazení křivky popisující pracovní diagram v plastické oblasti. Vztah (8.1) vychází z Obrázku 37.

$$\tan E_z = \frac{\overline{\sigma_P} - \sigma_Y}{\overline{\epsilon_P} - \epsilon_Y} \quad (8.1)$$

Poměrné prodloužení ϵ_Y obsažené v rovnici (8.1) můžeme dopočítat na základě Hookova zákona přepsaného do následujícího tvaru:

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{235}{2,1 \cdot 10^5} = \underline{1\,119 \cdot 10^{-6}}. \quad (8.2)$$

Podle [4] je možno přibližně stanovit poměr

$$\frac{A_0}{A_p} \quad (8.3)$$

na základě Tabulky 5 převzaté z [5].

Tabulka 5

Materiál	Poměr A_0 / A_p
Ocel	1,10 až 1,25
Hliník	1,00 až 1,10
Mosaz	1,50 až 1,55
Měď	1,55 až 1,60

Nyní můžeme také dopočítat skutečné napětí na mezi pevnosti podle následující rovnice

$$\overline{\sigma_P} = \sigma_P \frac{A_0}{A_p} = 420 \cdot 1,18 = \underline{495,6 \text{ MPa}} \quad (8.4)$$

Dále si z upravené rovnice (4.9) vyjádříme poměrné prodloužení na mezi pevnosti ϵ_P , rovnice (8.5.) resp. (8.6). Dosadíme-li poměrné prodloužení na mezi pevnosti do vztahu (8.7), získáme poměrné prodloužení na skutečné mezi pevnosti.

$$\overline{\sigma_P} = \sigma_P (1 + \epsilon_{pt}), \quad (8.5)$$

odkud úpravou

$$\epsilon_P = \frac{\overline{\sigma_P}}{\sigma_P} - 1 = \frac{495,6}{420} - 1 = \underline{0,18}, \quad (8.6)$$

potom

$$\overline{\epsilon_P} = \ln(1 + \epsilon_P) = \ln(1 + 0,18) \cong \underline{0,166}. \quad (8.7)$$

Dále dosadíme z rovnic (8.2), (8.4) a (8.7) do rovnice (8.1), dostaneme úhel E_z .

$$\tan E_z = \frac{\bar{\sigma}_p - \sigma_Y}{\bar{\epsilon}_p - \epsilon_Y} = \frac{495,6 - 235}{0,166 - 1\,119 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{1\,585\,MPa}} \quad (8.8)$$

8.4 Aproximace smluvního diagramu oceli 11 523

Postup je analogicky jako v předešlé kapitole pro oceli 11 373 a 11 375, tudíž provedeme pouze výpočet dosazením do vztahů (8.2), (8.4), (8.6), (8.7) a (8.8), které byly odvozeny.

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{355}{2,1 \cdot 10^5} = 169 \cdot 10^{-5}. \quad (8.9)$$

$$\bar{\sigma}_p = \sigma_p \frac{A_0}{A_p} = 560 \cdot 1,18 = \underline{\underline{660,8\,MPa}} \quad (8.10)$$

$$\epsilon_p = \frac{\bar{\sigma}_p}{\sigma_p} - 1 = \frac{660,8}{560} - 1 = \underline{\underline{0,18}} \quad (8.11)$$

$$\bar{\epsilon}_p = \ln(1 + \epsilon_p) = \ln(1 + 0,18) \cong \underline{\underline{0,166}} \quad (8.12)$$

$$\tan E_z = \frac{\bar{\sigma}_p - \sigma_Y}{\bar{\epsilon}_p - \epsilon_Y} = \frac{660,8 - 355}{0,166 - 169 \cdot 10^{-5}} = \underline{\underline{1\,867\,MPa}} \quad (8.13)$$

Pro numerické řešení metodou konečných prvků k popsání chování materiálu byl zvolen Cowper – Symondsův model, kapitola 6 *Materiálové modely v MKP řešičích*.

8.5 Vstupy materiálových modelů pro řešení MKP

Tabulka 6

Materiál	Mez kluzu σ_Y [MPa]	Modul pružnosti E [MPa]	Mez pevnosti v tahu σ_p [MPa]	Hustota ρ [t·mm ⁻³]	Poissonova konst. μ [-]	Plastický modul zpevnění E_z [MPa]
11 373	235	$2,1 \cdot 10^5$	420	$7,85 \cdot 10^{-9}$	0,3	1 585
11 375						
11 523	355		560			1 867
MATD020	-		-			-

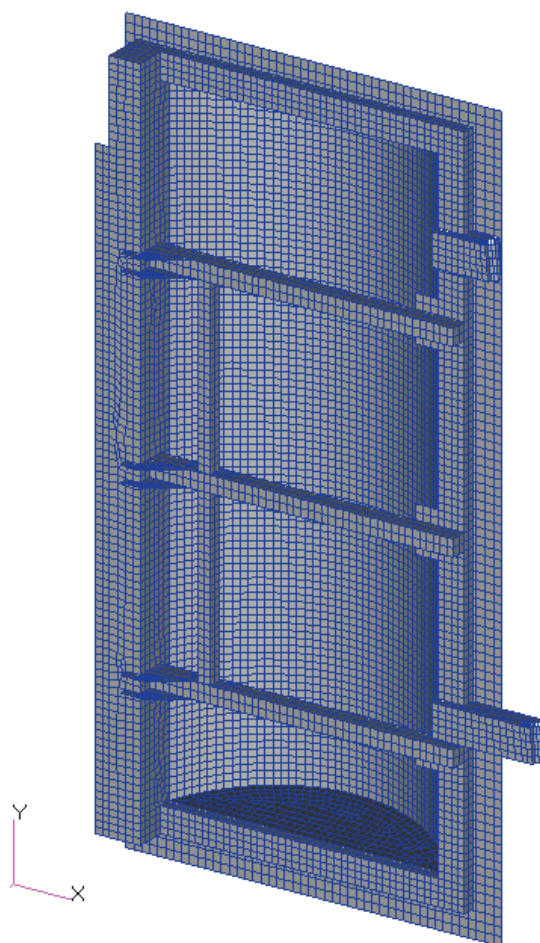
8.6 Konečnoprvkový model

8.6.1 Konečnoprvková síť

Geometrický model byl tvořen jako skořepinový a tomu se musela přizpůsobit volba typu elementů. Konečnoprvkový model je nakonec vytvořen ze čtyř uzlových prvků v MSC softwaru označen jako *QUAD4*. Celkový počet elementů a uzlů je uveden v Tabulce 7. Vhodné dělení jednotlivých ploch při tvorbě geometrického modelu nám umožnilo z větší části vytvořit rovnoměrně rozloženou síť. Hlavně jsme se zaměřili na to, aby všechny elementy měly přibližně stejnou velikost, protože délka výpočtu je ovlivněna nejmenším elementem. Vygenerovaná síť je uvedena na Obrázku 38.

Tabulka 7 – konečnoprvková síť - přehled

Typ elementu	Počet elementů	Počet uzlů
QUAD4	12 928	12 985



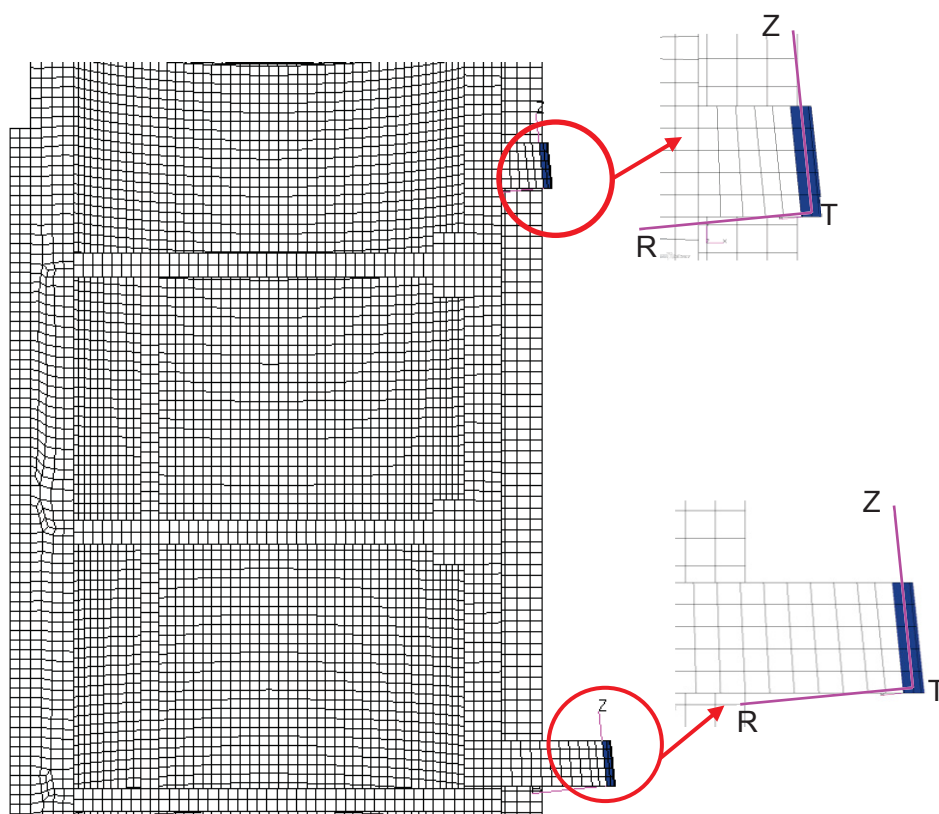
Obrázek 38 – vygenerována MKP síť

8.6.2 Okrajové podmínky a kontakty

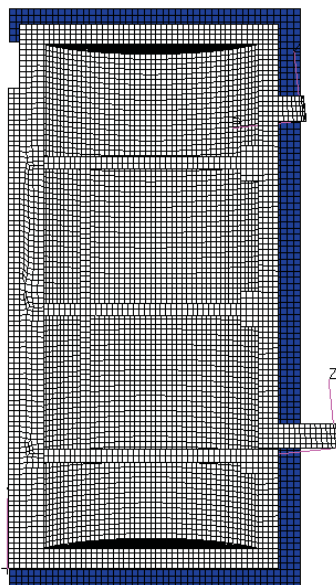
Okrajové podmínky byly aplikovány na modře vyznačené plochy, viz Obrázek 39 a 40. Pro oba úchyty byl zakázán posuv ve směru osy R a T (cylindrický souřadný systém), Obrázek 39. Dále byly odebrány všechny stupně volnosti rámu, Obrázek 40.

Při definici okrajových podmínek byly využity také kontakty. První kontakt byl definován pro všechny plochy, které tvoří hrázové dveře, jako „deformable“. Definováním tohoto kontaktu byla zajištěna spojitost modelu, takže model se nyní chová jako celek (svařenec), což odpovídá skutečnému objektu. Takže všechny části ve skupině, kde byl definován tento typ kontaktu, jsou napevno spojeny, avšak všechna tělesa se pod vlivem zatížení deformují.

V druhém případě jsme opět využili typ kontaktu „deformable“, avšak jiným nastavením bylo docíleno, že 2D plochy, na které byl tento kontakt definován, se chovají jako dokonale tuhá tělesa (rám). Souvisí to s materiálem přiřazeným těmto plochám. Přiřazený materiál je v MSC softwaru označen jako *MAT020D*. Plochy, jichž se toto nastavení týká, jsou vyobrazeny na Obrázku 40.



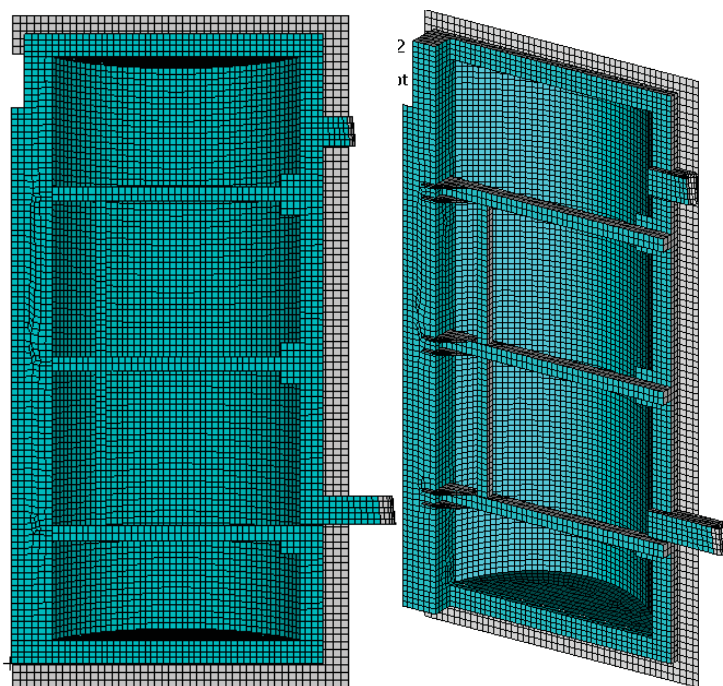
Obrázek 39 – plochy, na které byly aplikovány okrajová podmínky, jsou vyznačeny modře



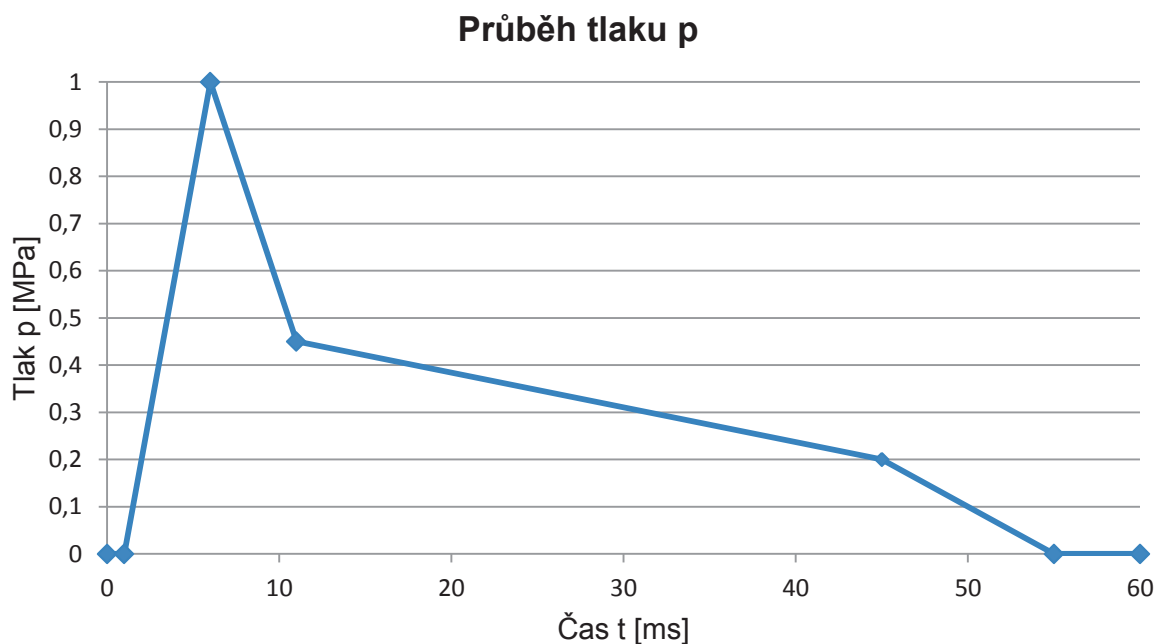
Obrázek 40 – okrajové podmínky pro rám

8.6.3 Aplikované zatížení

Zatížení, kterému jsou hrázové dveře podrobeny, je rovno deseti atmosférám, přičemž jsou dveře tomuto tlaku podrobeny jen velice krátký časový úsek. Na Obrázku 30 je ukázka reálného průběhu zatížení dveří získaného z experimentálního měření. Obrázek 41 znázorňuje místa, na které bylo aplikováno zatížení při numerickém řešení MKP v MSC Nastranu. Průběh tlaku, který byl na model aplikován, je znázorněn na Obrázku 42.



Obrázek 41 – plochy, na které bylo aplikováno zatížení, jsou vyznačeny modře



Obrázek 42 – průběh tlaku definovaného v MKP řešiči

Tabulka 8

Čas t [ms]	Tlak p [MPa]
0	0
1	0
6	1
11	0,45
45	0,2
55	0
60	0

8.7 Nastavení řešiče SOL 700

Ve většině případů jsme ponechali nastavení na výchozí hodnoty. Bylo třeba nastavit chování kontaktů, ale o tom jsme se již zmínili v předchozí kapitole 8.6.2 *Okrajové podmínky a kontakty*. Dále bylo třeba vhodně nastavit počet časových kroků výpočtu a čas, po který je hrázový objekt zatížen. Časový krok jsme zvolili 100 a čas, po který působí zatížení, jsme nastavili na základě zadaných dat pro tlakové zatížení, tedy 60 ms, viz tabulka 8.

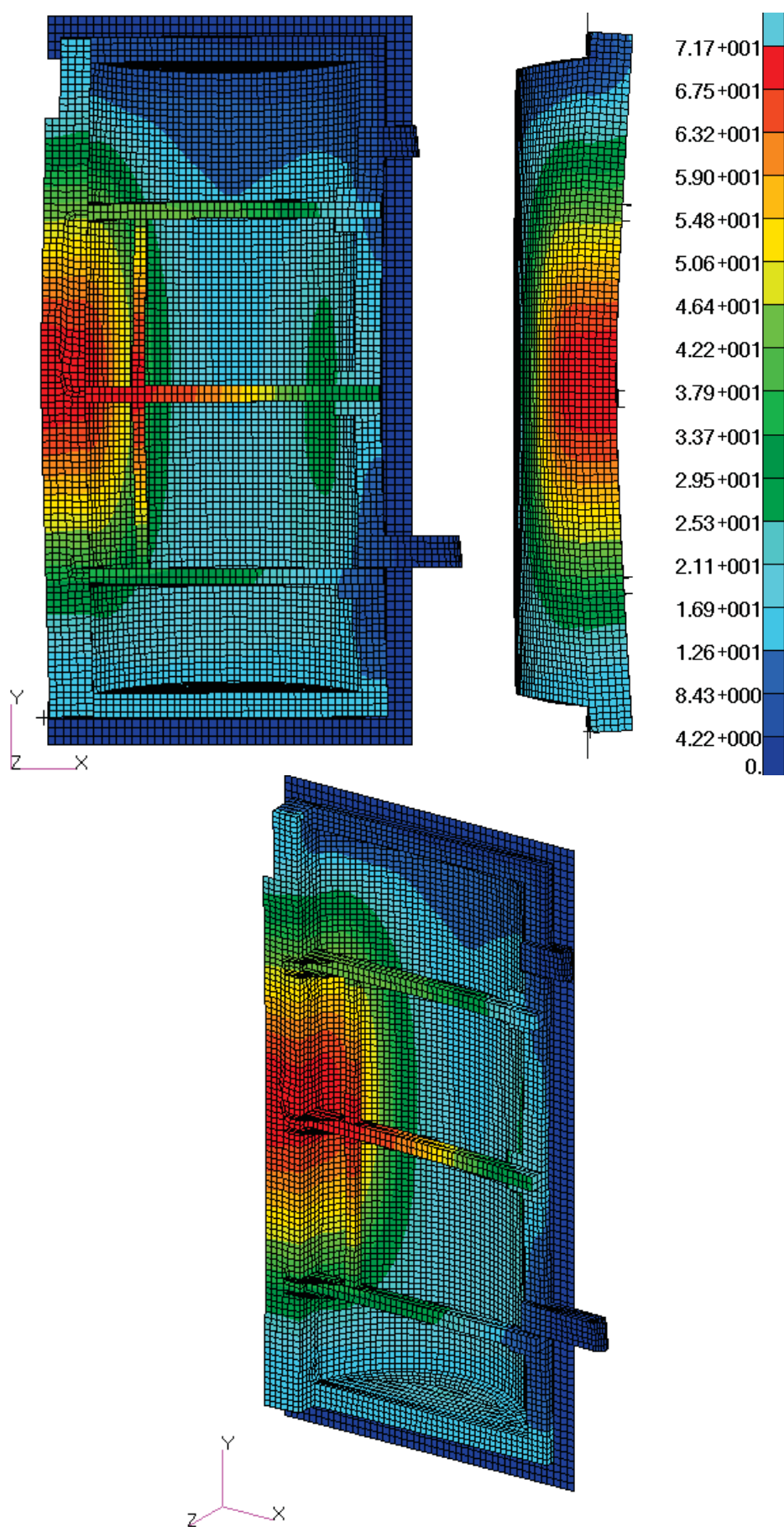
8.8 Shrnutí dosažených výsledků MKP

S úspěchem se nám podařilo vhodně nastavit konečnoprvkový model i řešič SOL 700. Získané výsledky demonstrujeme Obrázky 43, 44, 45 a 46. Jak je vidět na Obrázku 45, tak náš výběr nejvíce namáhaného místa a symetrické deformace po délce nosníku při analytickém řešení je správný.

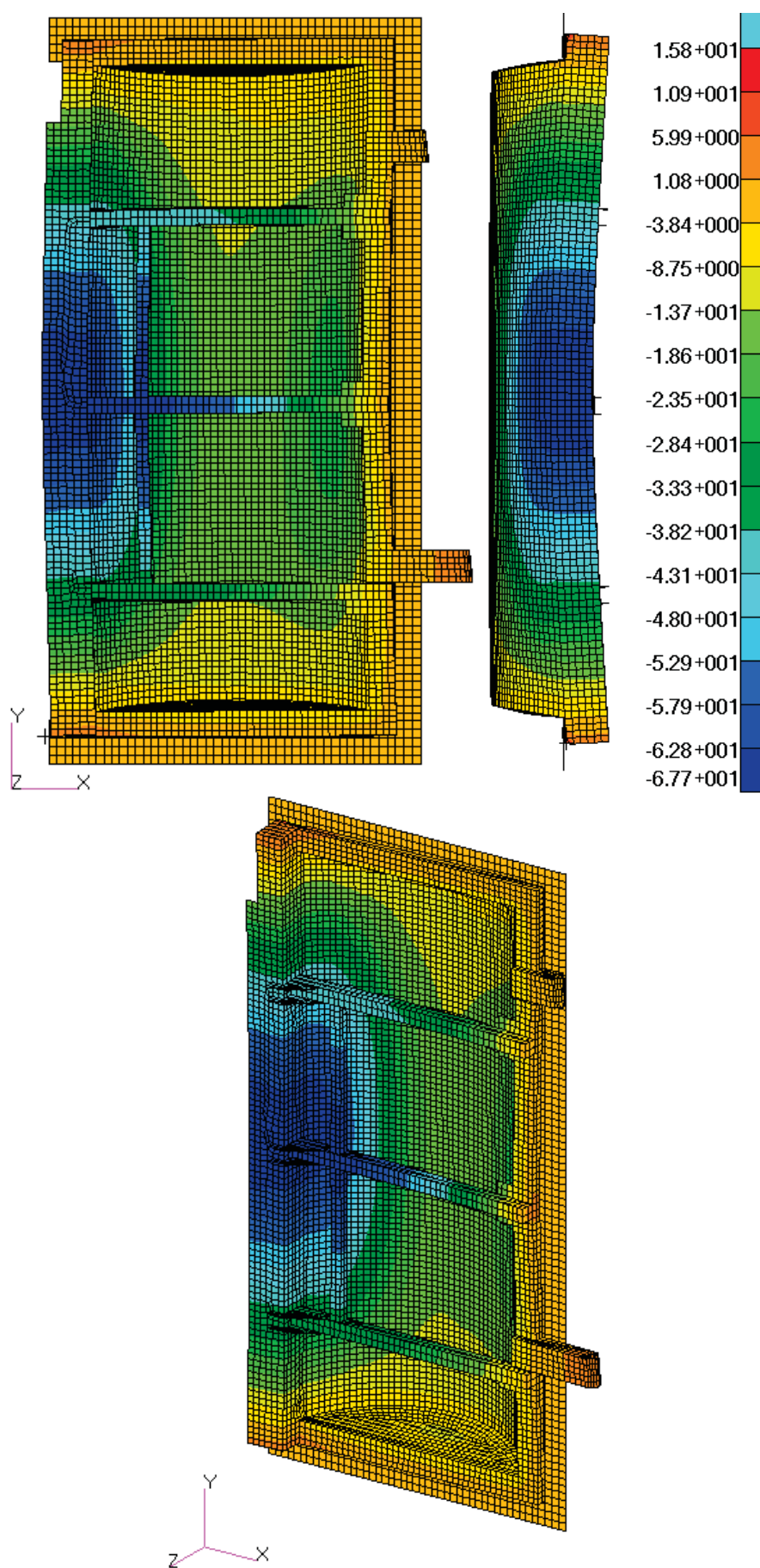
Na Obrázku 43 je zobrazena celková deformace, která dosahuje hodnoty 71,7 mm. Na Obrázku 44 je uvedena deformace v ose z. Průhyb nosníku v ose z 67,7 mm. Dále ještě uvádíme napětí podle hypotézy HMM, Obrázek 45 a velikost plastické deformace, Obrázek 46.

Tabulka 9

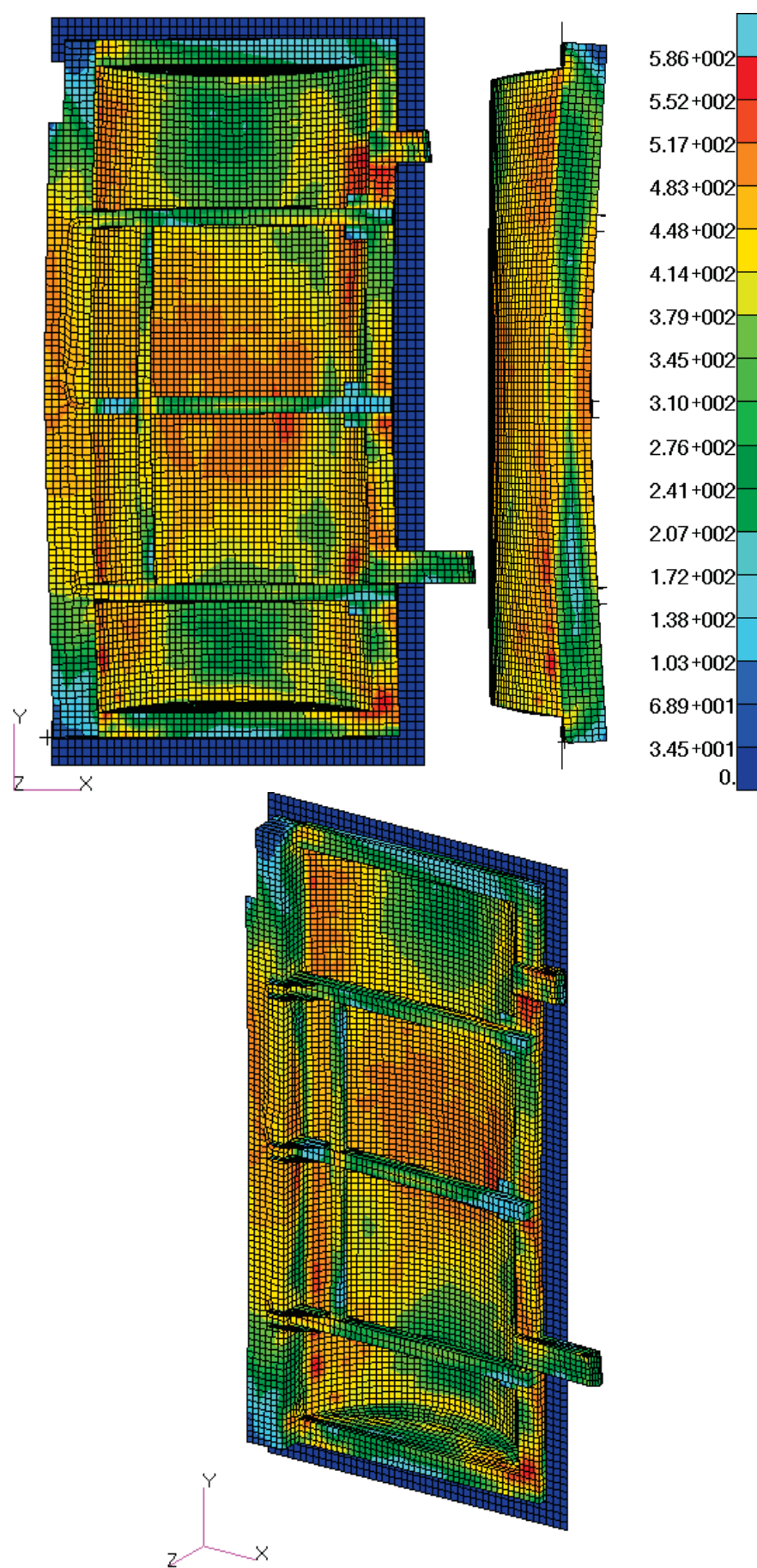
Celková deformace	71,7 mm
Deformace nosníku ve směru osy z	67,7 mm
Napětí dle HMM	596 MPa



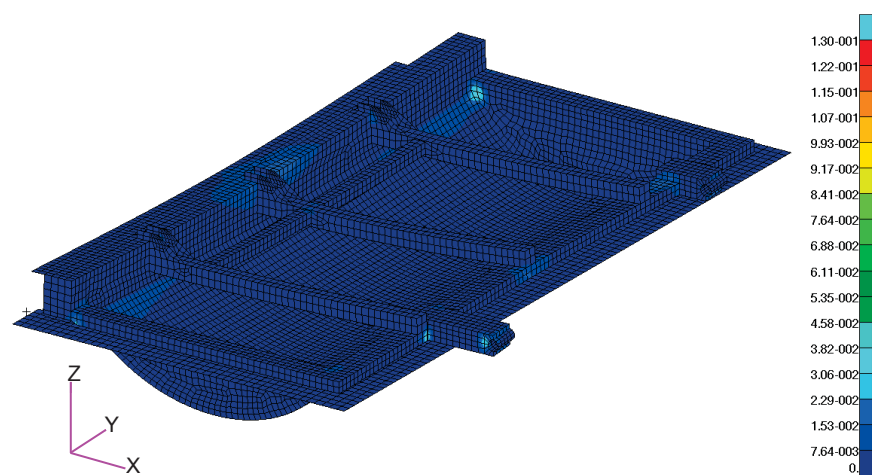
Obrázek 43 – celková deformace [mm]



Obrázek 44 – deformace ve směru osy z [mm]



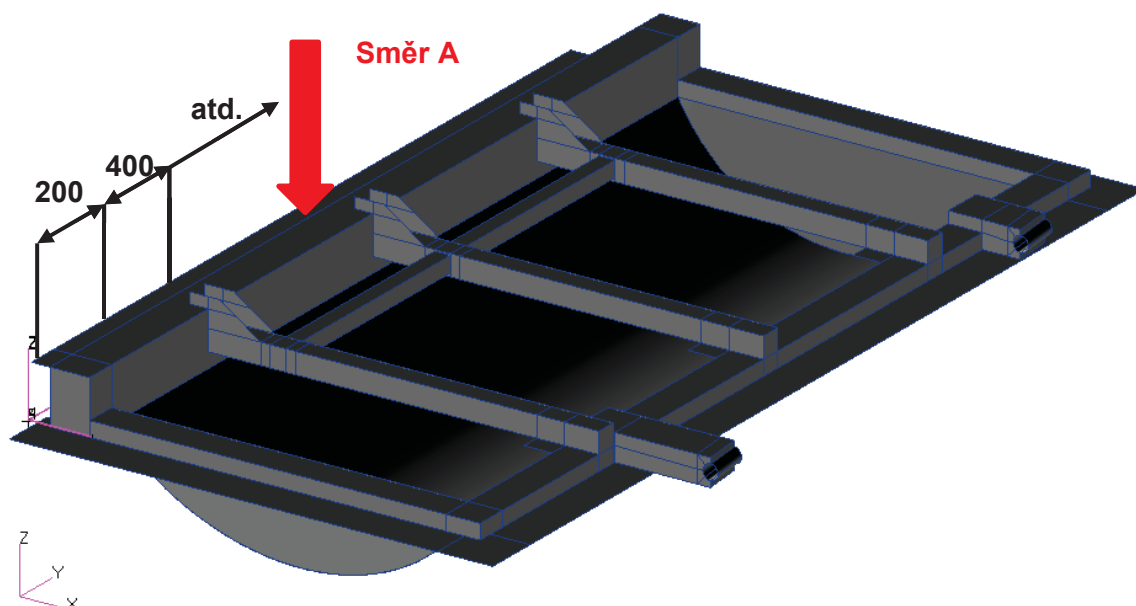
Obrázek 45 – napětí dle HMH [MPa]



Obrázek 46 – plastická deformace [mm]

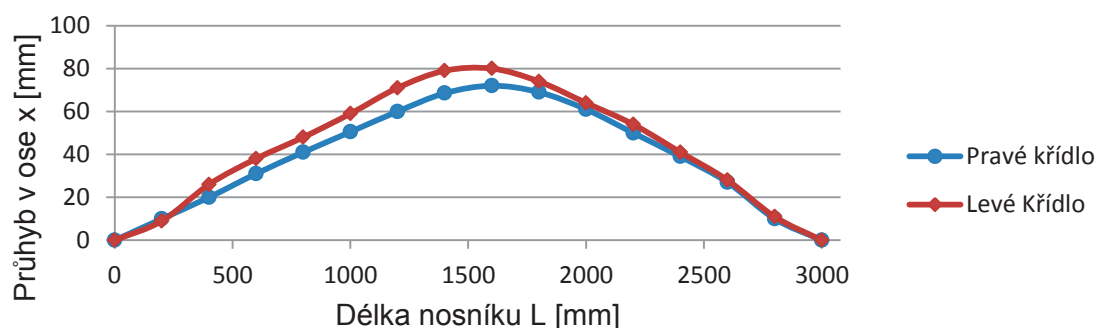
9 Experimentální měření, shrnutí výsledků

Data z experimentu byla získána ze zkušební odpalu, který se provedl ve zkušební štolě ve Štramberku. Usazené hrázové dveře byly podrobeny rázovému zatížení, které odpovídalo velikosti $p = 1 \text{ MPa}$, viz Obrázek 30. Následně se na obou křídlech hrázových dveří změřily na nosnících hodnoty průhybů ve vzdálenostech 200 mm pro směr A (souhlasí se směrem osy z), Obrázek 47. Na Obrázku 48 je vidět v grafu reálný průhyb nosníku, který byl měřením ve směru A stanoven přibližně na 80 mm v místě $L = 1\,600 \text{ mm}$ pro levé křídlo. Při analytickém výpočtu jsme vycházeli z předpokladu, že maximální průhyb bude v polovině nosníku, tedy že průběh bude symetrický, což jak vidíme z experimentu i z numerického výpočtu téměř odpovídá. Výsledky z experimentu uvádíme v Tabulce 10. Nakonec Obrázek 49 ilustruje hrázový objekt po výbuchu.



Obrázek 47

Přůhyb nosníku v ose z



Obrázek 48

Tabulka 10 – výsledky deformace z experimentu

Poloha	Deformace nosníku pravého křídla [mm]	Deformace nosníku levého křídla [mm]
0	0	0
200	10	9
400	20	26
600	31	38
800	41	48
1000	50,5	59
1200	60	71
1400	68,5	79
1600	72	80
1800	69	74
2000	61	64
2200	50	54
2400	39	41
2600	27	28
2800	10	11
3000	0	0



Obrázek 49

10 Závěrečné shrnutí dosažených výsledků

Předložená diplomová práce se zabývá kontrolním výpočtem konstrukce důlního hrázového objektu používajícího se, jako bezpečnostní prvek při možném výbuchu v dolech. Výbuch, respektive výsledné namáhání výbuchem způsobené působící na hrázové dveře svým řešením spadá do oblasti rychlých dynamických dějů.

V teoretické části je provedena rešerše teorie rázových dějů z pohledu doposud vypracovaných modelů, které problematiku rázů řeší. Jedná se o Newtonovou teorii, Hertzovou teorii, a také vlnovou teorii rázů. Hlavně jsme se zaměřili na vlnovou teorii rázu, která je nejvíce rozvinutá a poskytuje řešiteli dobré výsledky. V souvislosti s vlnovou teorií jsme se ještě zabývali šířením napěťových vln, jejich lomem, odrazem a superpozicí. Další oblastí, která je v první části probírána, je plastické chování materiálu, kde jsme se v první řadě věnovali tahové zkoušce a z ní vycházejícím pracovním diagramům. Byly prezentovány základní způsoby aproximace skutečných pracovních diagramů. Následně jsme se věnovali numerickým metodám, kde jsme ve stručnosti nastínili řešení metodou konečných diferencí a podívali se na řešení metodou konečných prvků z pohledu dvou přístupů řešení. Nakonec jsme se v teoretické části věnovali několika materiálovým modelům, které se v konečnoprvkových softwarech používají.

V praktické části je vypracováno analytické a numerické řešení problému. Analytický výpočet můžeme rozdělit na dvě sekce, kde jsme se nejprve věnovali výpočtu v elastické oblasti a následně v oblasti plasticity. V případě výpočtu v oblasti malých pružných deformací jsme stanovili průhyb nosníku na 22 mm. U analytického řešení se zahrnutím plasticity má průhyb velikost 73 mm, viz Tabulka 3. Výsledek řešení, kde jsme do výpočtu zahrnuli splastizování průřezu je velice blízky skutečnosti (experimentu). Chyba mezi analytickým řešením se zahrnutím plasticity a experimentu je 8,75%. V další části jsme provedli kontrolní pevnostní výpočet pomocí MKP softwaru Nastran a řešiče SOL 700. Z numerického výpočtu byl vyhodnocen průhyb nosníku 67,7 mm, viz Tabulka 9. Takže chyba mezi numerickým řešením a skutečně změřeným průhybem je oproti analytickému řešení větší, přibližně 15 %.

Rozdíly, které v řešeních jsou, si vysvětlujeme tak, že v případě analytického řešení jednak nemusí být přesně odečteny velikosti tlakového zatížení v jednotlivých časových intervalech a jednak při samotném odvození empirických vztahů jsou zavedeny různé předpoklady. Např. uvažujeme nosník prostě podepřený, nebo aproximuje pracovní diagram.

V případě chyby numerického výpočtu metodou konečných prvků je zcela jistě zanesena chyba v aproximaci skutečného tlakového zatížení, které jsme značně zjednodušili, aby výpočet trval přiměřenou dobu. Dále i zde byla provedena aproximace smluvních diagramů

pro použité materiály. Další zjednodušení a zkrácení výsledku z MKP analýzy je zaneseno úvahou absolutně tuhé hráze, což neodpovídá skutečnému objektu.

Výsledky z analytického i numerického řešení porovnáváme s referenční hodnotou z experimentálního měření, které však nemusí být zcela přesné a může obsahovat chyby, které při analytickém ani numerickém výpočtu nejsme schopni podchytit. Můžeme zmínit například usazení dveří při montáži hrázového objektu.

Obecně musíme konstatovat, že jsme také pracovali s daty získanými z materiálových listů, protože jsme neměli k dispozici skutečná materiálová data jednotlivých taveb, ze kterých byly vyrobeny jednotlivé konstrukční prvky hrázových dveří. Další skutečností je, že průběh zatížení pocházel z jiného experimentu, konkrétně z odstřelu PDIO dveří, protože jsme neměli k dispozici naměřená data pro konkrétní experiment, tudíž chyba může být dána také tím, že na hrázi byl ve skutečnosti vyšší tlak, než předepsaný zkušební o velikosti 1 MPa.

Numerický výpočet i experiment potvrdil náš předpoklad symetrické deformace při analytickém řešení. Analytické i numerické řešení můžeme považovat za správné, protože vyhodnocené výsledky v obou případech prakticky odpovídají provedenému experimentu s poměrně malou chybou. Na základě obou provedených pevnostních výpočtů můžeme konstatovat, že hrázové dveře svou úlohu splní.

V případě, že bychom chtěli mít přesnější výsledky pevnostní kontroly hrázových dveří, bylo by zapotřebí získat od výrobce relevantní materiálová data. U MKP výpočtu bychom pak ještě mohli provést analýzu na základě jiného materiálového modelu.

11 Seznam použitých pramenů

- [1] HÖSCHL, Cyril. *Rázová pevnost těles*. Praha, 1977. 119 s.
- [2] PEŠINA, Eugen. *Základy užití teorie plasticity*. 1. vyd. Praha: SNTL / SVTL, 1966. 188 s.
- [3] BREPTA, Rudolf. *Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 1977, 324 s.
- [4] BREPTA, Rudolf; PROKOPEC, Miroslav. *Šíření napěťových vln a rázy v tělesech*. 1. vyd. Praha: Academica, 1972, 524 s.
- [5] NĚMEC, Jaroslav; DVOŘÁK, Jan; HÖSCHL, Cyril. *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. Vyd. 1. Praha: SNTL, 1989, 599 s. ISBN 80-030-0193-5.
- [6] MEDVEC, Andrej; STRADIOT, Juraj; ZÁHOREC, Ondrej; CABAN, Slavomír. *Mechanika III: Dynamika*. 1. vyd. Praha: Alfa, 1988, 512 s.
- [7] TREBUŇA, František; ŠIMČÁK, František. *Odolnosť prvkov mechanických sústav*. vyd. 1. Košice: Technická univerzita v Košiciach, 2004, 980 s. ISBN 80-807-3148-9.
- [8] KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Vyd. 1. Brno: Computer Press, 2006, 220 s. ISBN 978-80-251-1448-3.
- [9] LEINVEBER, Jan; VÁVRA, Pavel. *Strojnické tabulky: pomocná učebnice pro školy technického zaměření*. 1. vyd. Úvaly: ALBRA, 2003, 865 s. ISBN 80-864-9074-2.
- [10] JONES, Norman. *Structural impact*. 1st pbk. ed. with corrections. New York: Cambridge University Press, 1997, 575 s. ISBN 05-213-0180-7.
- [11] LENERT, Jiří. *Úvod do metody konečných prvků*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, Strojní fakulta, 1999, 109 s. ISBN 80-707-8686-8.
- [12] PLÁNIČKA, František; KULIŠ, Zdeněk. *Základy teorie plasticity*. 2. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2009, 142 s. ISBN 978-80-01-04225-0.
- [13] KRČÁL, Otakar; FRYDRÝŠEK, Karel; ADÁMKOVÁ, Ludmila. *Příklady z pružnosti a pevnosti I*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 1994-2008, 2 s. ISBN 978-80-248-1826-92.
- [14] MEGSON, T. *Structural and stress analysis*. 2nd ed. Boston: Elsevier Butterworth Heineman, 2005, 724 s. ISBN 07-506-6221-2.
- [15] WRIGGERS, Peter. *Nonlinear finite element methods*. 1.ed.08th ed. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 978-354-0710-004.
- [16] KRUTINA, Jaroslav. *Sbírka vzorců z pružnosti a pevnosti*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1959, 254 s.
- [17] ANSYS, INC. *ANSYS Academic Research, Release 14.0 Help system*, Theory reference.

- [18] *MSC Nastran 2012 Quick Reference Guide* [Online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupný z WWW:
http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10004&cat=MSC_NASTRAN_DOCUMENTATION_2012&actp=LIST
- [19] *MSC Nastran 2012 Loads Management User's Guide* [Online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupný z WWW:
http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10011&cat=MSC_NASTRAN_DOCUMENTATION_2012&actp=LIST
- [20] *MSC Nastran 2012 Dynamic Analysis User's Guide* [Online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupný z WWW:
http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10002&cat=MSC_NASTRAN_DOCUMENTATION_2012&actp=LIST
- [21] *MSC Nastran 2012 Explicit Nonlinear (SOL 700) User's Guide* [Online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupný z WWW:
http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10008&cat=MSC_NASTRAN_DOCUMENTATION_2012&actp=LIST
- [22] *MSC Patran 2012 Materials User's Guide* [Online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupný z WWW:
http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10140&cat=2012_PATRAN_DOCS&actp=LIST
- [23] *MSC Patran 2012 Interface To MSC Nastran Preference Guide Volume 1: Structural Analysis* [Online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupný z WWW:
http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10142&cat=2012_PATRAN_DOCS&actp=LIST
- [24] *MSC Patran 2012 User's Guide* [Online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupný z WWW:
http://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC10145&cat=2012_PATRAN_DOCS&actp=LIST
- [25] HALAMA, Radim. *Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity kovů*. Ostrava, 2009. 141 s. Habilitační práce. VŠB – Technická univerzita Ostrava.
- [26] FUSEK, Martin; HALAMA, Radim. *MKP a MHP* [Online]. 2012 [cit. 2012-05-21]. Dostupný z WWW:
http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecných_prvku_a_hranicnich_prvku.pdf
- [27] BELJAJEV, Nikolaj Michajlovič. *Pružnost a pevnost II*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1954, 348 s.

12 Přílohy

12.1 Tabulky

Tabulka 11

Čas t [ms]	Tlak p [MPa]	Spojité zatížení q [Nmm]	Inkrement zatížení [Nmm]
845	0	0	0
847	0,96	144	144
849	0,99	148,5	4,5
851	1	150	1,5
853	0,56	84	1,5
855	0,55	82,5	1,5
857	0,54	81	1,5
859	0,53	79,5	1,5
861	0,52	78	1,5
863	0,51	76,5	1,5
865	0,5	75	6
867	0,46	69	9
869	0,4	60	0,75
871	0,395	59,25	0,75
873	0,39	58,5	0,75
875	0,39	57,75	0,75
877	0,38	57	1,5
879	0,37	55,5	3
881	0,35	52,5	3
883	0,33	49,5	3
885	0,31	46,5	1,5
887	0,3	45	3
889	0,28	42	1,5
891	0,27	40,5	1,5
893	0,26	39	1,5
895	0,25	37,5	1,5
897	0,24	36	1,5
899	0,23	34,5	1,5
901	0,22	33	1,5

Tabulka 12

Průhyb nosníku pro $\Delta x = 192,5$ mm									
Uzel / Čas	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8
845	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
847	0	3,0	5,9	8,5	10,8	12,6	14,0	14,8	15,1
849	0	3,1	6,0	8,8	11,1	13,0	14,4	15,3	15,6
851	0	3,1	6,1	8,8	11,2	13,1	14,6	15,4	15,7
853	0	3,2	6,2	8,9	11,3	13,3	14,7	15,6	15,9
855	0	3,2	6,2	9,0	11,4	13,4	14,9	15,7	16,0
857	0	3,2	6,3	9,1	11,5	13,5	15,0	15,9	16,2
859	0	3,2	6,4	9,2	11,7	13,7	15,1	16,1	16,4
861	0	3,3	6,4	9,3	11,8	13,8	15,3	16,2	16,5
863	0	3,3	6,5	9,4	11,9	13,9	15,4	16,4	16,7
865	0	3,4	6,7	9,7	12,3	14,5	16,0	17,0	17,3
867	0	3,6	7,1	10,3	13,0	15,2	16,9	17,9	18,2
869	0	3,6	7,1	10,3	13,1	15,3	17,0	18,0	18,3
871	0	3,7	7,1	10,3	13,1	15,4	17,0	18,1	18,4
873	0	3,7	7,2	10,4	13,2	15,4	17,1	18,1	18,5
875	0	3,7	7,2	10,4	13,2	15,5	17,2	18,2	18,6
877	0	3,7	7,3	10,5	13,3	15,6	17,3	18,4	18,7
879	0	3,8	7,4	10,7	13,6	15,9	17,6	18,7	19,0
881	0	3,8	7,5	10,9	13,8	16,2	17,9	19,0	19,3
883	0	3,9	7,6	11,0	14,0	16,4	18,2	19,3	19,7
885	0	3,9	7,7	11,1	14,1	16,6	18,4	19,4	19,8
887	0	4,0	7,8	11,3	14,3	16,8	18,6	19,8	20,1
889	0	4,0	7,9	11,4	14,5	16,9	18,8	19,9	20,3
891	0	4,1	7,9	11,5	14,6	17,1	18,9	20,1	20,4
893	0	4,1	8,0	11,6	14,7	17,2	19,1	20,2	20,6
895	0	4,1	8,1	11,7	14,8	17,3	19,2	20,4	20,8
897	0	4,2	8,1	11,8	14,9	17,5	19,4	20,5	20,9
899	0	4,2	8,2	11,8	15,0	17,6	19,5	20,7	21,1
901	0	4,2	8,2	11,9	15,1	17,7	19,7	20,8	21,2

12.2 Algoritmy – MATLAB

12.2.1 Vstupní data

%% zadáné veličiny

% rozmery nosniku

B = 150; % [mm]

H = 200; % [mm]

t = 16; % [mm]

L = 3080; % [mm]

b = 118; % [mm]

h = 168; % [mm]

% materiálové vlastnosti

E = 2.1e5; % [MPa]

rho = 7.85e-9; % [t/mmE-3]

Sy = 355; % [MPa] % napětí na mezi kluzu

12.2.2 Procedura analytického řešení bez vlivu plasticity pro $\Delta x = 770$ mm

zadani % Načtení zadaných veličin

A = L*B; % Výpočet plochy [mm²] na kterou působí spojitě zatížení

J = (B*H³)/12 - (((B-2*t)*(H-2*t)³)/12); % Moment setrvačnosti [mm⁴]

% Přepočtené tlakového zatížení na spojitě

q = [144 4.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 6 9 0.75 0.75 0.75 0.75 1.5 3 3 3 1.5 3 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5];

%% Výpočet průhybu

% Příprava na výpočet

clear yinit % Smaže počátek z předešlého příkladu

dt = 2; % Časový increment

dx = 770; % Délkový increment [mm]

yinit(1,3) = zeros; % Počáteční průhyb

Y = [yinit;]; % Vytvoří matici, do které se budou zapisovat průhyby v jednotlivých uzlech a časových úsecích

a = (E*J)/(dx⁴); b = ((-4*E*J)/dx⁴)+((rho*A)/dt²); c = ((6*E*J)/dx⁴)-((2*rho*A)/(dt²)); % Substitute

```

% Algoritmus výpočtu
for i = 1:28
    K = [(-a+c) b a; b c b; a b (c-a)]; % Matice odvozených koeficientů
    y = inv(K)*[q(i);q(i);q(i)];
    y = y';
    yinit = yinit+y;
    Y = [Y;yinit];
end

Z(29,1) = zeros; % Vytvoří nulovou sloupcovou matici
y770 = [Z Y Z] % Matice průhybu pro zvolené uzly v jednotlivých časových krocích

inc %Načítá další algoritmus výpočtu

```

12.2.3 Procedura analytického řešení bez vlivu plasticity pro $\Delta x = 385$ mm

zadani % Načtení zadaných veličin

```

A = L*B; % Výpočet plochy [mm^2] na kterou působí spojitě zatížení
J = (B*H^3)/12 - (((B-2*t)*(H-2*t)^3)/12); % Moment setrvačnosti [mm^4]

% Přepočet tlakového zatížení na spojitě
q = [144 4.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 6 9 0.75 0.75 0.75 0.75 1.5 3 3 3 1.5 3 1.5 1.5 1.5
1.5 1.5 1.5 1.5];

%% Výpočet průhybu
% Příprava na výpočet

clear yinit % Smaže počátek z předešlého příkladu
dt = 2; % Časový increment
dx = 385; % Délkový increment [mm]
yinit(1,7) = zeros; % Počáteční průhyb
Y = [yinit;]; % Vytvoří matici, do které se budou zapisovat průhyby v jednotlivých uzlech a
časových úsecích
a = (E*J)/(dx^4); b = ((-4*E*J)/dx^4)+((rho*A)/dt^2); c = ((6*E*J)/dx^4)-
((2*rho*A)/(dt^2)); % Substitute

```

```

% Algoritmus výpočtu
for i = 1:28
    K = [(-a+c) b a 0 0 0 0; b c b a 0 0 0; a b c b a 0 0; 0 a b c b a 0; 0 0 a b c b a; 0 0 0 a b c
b; 0 0 0 0 a b (c-a)]; % Matice odvozených koeficientů
    y = inv(K)*[q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i)];
    y = y';
    yinit = yinit+y;
    Y = [Y;yinit];
end

Z(29,1) = zeros; % Vytvoří nulovou sloupcovou matici
y385 = [Z Y Z] % Matice průhybu pro zvolené uzly v jednotlivých časových krocích

```

inc_high %Načítá poslední algoritmu výpočtu

12.2.4 Procedura analytického řešení bez vlivu plasticity pro $\Delta x = 192,5$ mm

zadani % Načtení zadaných veličin

A = L*B; % Výpočet plochy [mm²] na kterou působí spojité zatížení
J = (B*H³)/12 - (((B-2*t)*(H-2*t)³)/12); % Moment setrvačnosti [mm⁴]

% Přepočet tlakového zatížení na spojité

q = [144 4.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 6 9 0.75 0.75 0.75 0.75 1.5 3 3 3 1.5 3 1.5 1.5 1.5
1.5 1.5 1.5 1.5];

%% Výpočet průhybu
% Příprava na výpočet

clear yinit % Smaže počátek z předešlého příkladu
dt = 2; % Časový increment
dx = 192.5; % Délkový increment [mm]
yinit(1,15) = zeros; % Počáteční průhyb
Y = [yinit;]; % Vytvoří matici, do které se budou zapisovat průhyby v jednotlivých uzlech a
časových úsecích
a = (E*J)/(dx⁴); b = ((-4*E*J)/dx⁴)+((rho*A)/dt²); c = ((6*E*J)/dx⁴)-
((2*rho*A)/(dt²)); % Substitute

% Algoritmus výpočtu

for i = 1:28
K = [(-a+c) b a 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; b c b a 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; a b c b a 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 a b c b a 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 a b c b a 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 a b c b a 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 a b c b a 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 a b c b a 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 a b c b a 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 a b c b a 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 a b c b a 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 a b c b a 0; 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 a b c b a; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 a b c b; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 a b (c-a)]; % Matice
odvozených koeficientů
y = inv(K)*[q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);q(i);
y = y';
yinit = yinit+y;
Y = [Y;yinit];
end

Z(29,1) = zeros; % Vytvoří nulovou sloupcovou matici
y192 = [Z Y Z] % Matice průhybu pro zvolené uzly v jednotlivých časových krocích

x=0:770:3080;
plot(x,y770(28,:), 'v-','Linewidth',2)
grid on
hold on
xlim([0 L]);
title('Průhyb nosníku z analytického řešení')


```

xlabel('Délka nosníku L [mm]')
ylabel('Průhyb nosníku y [Nmm]')

x=0:385:3080;
plot(x,y385(28,:), 'k*-','Linewidth',2)

x=0:3080/16:3080;
plot(x,y192(28,:), 'ro-','Linewidth',2)

%% Statické řešení průhybu nosníku

q=150; % Zadání konstantního zatížení
x=0:3080;
y=((q*L^4)/(24*E*I))*((x/L)-(2*x.^3/L^3)+(x.^4/L^4)); % Přesné řešení průhybu nosníku

plot(x,y,'c-','Linewidth',3)

legend('Aproximace s krokem L/4','Aproximace s krokem L/8','Aproximace s krokem L/15','Statické řešení průhybu bez časového vlivu');

```

12.2.5 Procedura analytického řešení se zahrnutým vlivem plasticity

Tvarový součinitel

```

zadani % načtení zadaných veličin
%% příprava výpočtu
% stanovení plochy průřezu a polohy těžiště v směru osy "y"
A1 = (B-2*t)*t;
yt1 = H/2 - t/2;
A2 = H*t/2;
yt2 = H/4;

A = A1+2*A2; % celková plocha průřezu
y1c = (yt1*A1 + 2*yt2*A2)/(A);
J = (B*H^3)/12 - (((B-2*t)*(H-2*t)^3)/12); % kvadratický moment průřezu
y1 = H/2; % vzdálenost krajního vlákna

%% výpočet plastického momentu
Zp = (A/2)*(2*y1c);
Zc = J/y1;
f = Zp/Zc;

```

$M_y = Z_c \cdot S_y$; % ohybový moment

$M_o = f \cdot M_y$ % plastický moment

Výpočet průhybu

zadani % načtení zadaných veličin

%% zadane hodnoty

$q = 150$; % [N/mm] - přepočteno z " $p = 1$ MPa"

$q_0 = q$;

$L = 3080/2$; % [mm] - délka nosníku

$m = 7.701e-5$; % [t/mm] - hmnotnost vzatezena na jednotku delky

%% vypocet obyhooveho momentu M_o

$x = 0:L$;

$M_o = q \cdot (L \cdot x - (x.^2)/2)$;

% graficka vizualizace pruhybu nosniku

`plot(x,-Mo,'Linewidth',2);`

`xlim([0 L]);`

`title('Průběh ohybového momentu')`

`xlabel('Délka nosníku L [mm]')`

`ylabel('Ohybový moment M_o [Nmm]')`

`grid on`

$M_o = \max(M_o)$; % [Nmm] - vyhledá maximální ohybový moment

$M_o = 118462080$; % [Nmm]

%% stanoveni pruhybu v oblasti plasticity

% vypocet kritickeho zatizeni a pomeru statickeho zatizeni / kritickemu

$q_c = 2 \cdot M_o / L^2$;

$\eta = q_0 / q_c$;

%% vypocet pro $\eta < 3$

% první etapa

$\tau = 10e-3$;

$W_1 = (3 \cdot (\eta - 1) \cdot M_o \cdot \tau^2) / (2 \cdot m \cdot L^2)$

% druhá etapa

$T = \eta \cdot \tau$;

$t = T$;

$$W_2 = (3 \cdot M_0 \cdot (2 \cdot \eta \cdot \tau \cdot t^2 - \eta \cdot \tau^2)) / (2 \cdot m \cdot L^2)$$

% konečný průhyb = průhybu z druhé etapy

$$w = (3 \cdot \eta \cdot (\eta - 1) \cdot M_0 \cdot \tau^2 \cdot (1 - x/L)) / (2 \cdot m \cdot L^2);$$

$$W_f = \max(w)$$

12.3 Seznam příloh dodaných na DVD

- M – Files pro analytický výpočet
- Text diplomové práce

12.4 Seznam použitého softwaru

- MSC Patran v2012
- MSC Nastran v2012
- Lexikon kovů v 1
- MS Word
- MS Excel
- MATLAB 2010

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval panu Ing. Martinu Fuskovi, Ph.D. za vřelý přístup, cenné rady a příjemně strávené chvíle při vypracování diplomové práce. Rád bych také poděkoval mé rodině a přítelkyni za pochopení a pomoc v tomto životním období.